evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# CLIL

## VE VÝUCE MATEMATIKY

Orlová
2012

# OBSAH

# ÚVOD

Publikace, která se Vám dostává do rukou, je jedním ze stěžejních výstupů **projektu CLIL DATABASE – tvorba metodických a učebních materiálů pro zavádění výuky vybraných předmětů metodou CLIL**, který probíhal od června 2011 do června 2012 a jehož hlavním posláním byla propagace metody CLIL v Moravskoslezském kraji.

Tato publikace je souborem pracovních listů z matematiky určených pro žáky středních škol.

Barbora Paulíková

# DEFINITION OF FUNCTION, INTRODUCTION TO FUNCTIONS

**What is function?**

In every day life many quantities depend on one or more changing variables. For example the temperature of boiling water depends on atmospheric pressure, plants growth depends on sunlight and rainfall and also marks from tests depend on preparation, doing homeworks and etc.

We say that two variables are tied by a functional dependence. Exactly we say this if we can receive each value of one of the variables by the certain rule with using values of another.

**The function** is a rule that says how one quantity depends on another quantity/other quantities.

**Definition of the function**

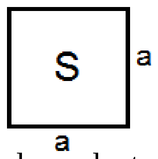
Function of a single variable on set $A$ $(A \subset R)$ is a relation in which for each element of set $A$ is given one element of another set $B$ $(B \subset R)$.

The first quantity (variable) is a function of the second quantity (variable) if there is a relationship between them; every value of the first variable matches with only one value of the second variable .

***Examples:***

**1.** The equation for the area of a square is $S = a^2$

| **a (cm)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 12 | 50 | 51 | 100 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **S (cm$^2$)** | 1 | 4 | 9 | 16 | 144 | 2500 | 2 601 | 10 000 | 0,01 |




This is a function. Each value of the independent variable *a* gives us one value of the dependent variable *S*.

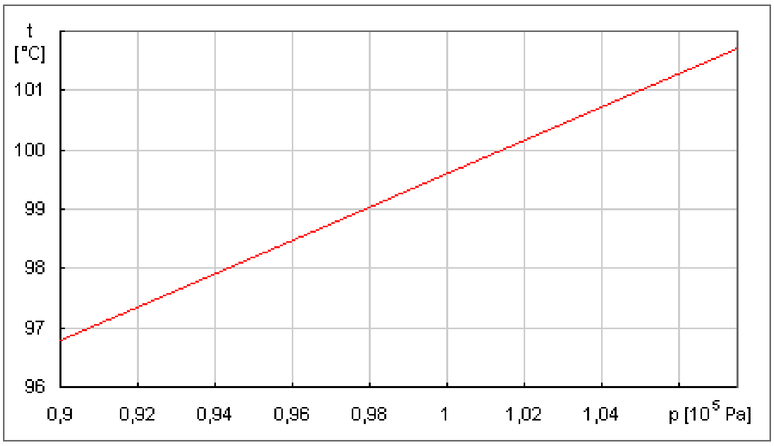
**2.** “Multiply by 3“ is also a very simple function $y = 3x$

| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 | 12 | 50 | 51 | 100 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 3 | 6 | 9 | 12 | 36 | 150 | 153 | 300 | 0,3 |

**3.** Dependence of the temperature of boiling water on atmospheric pressure:

$$t = 71{,}6 + 28 \cdot \left(\frac{p}{10\,000}\right)$$

For each value of atmospheric pressure we can compute (read from graph) only one value of the temperature of boiling water.

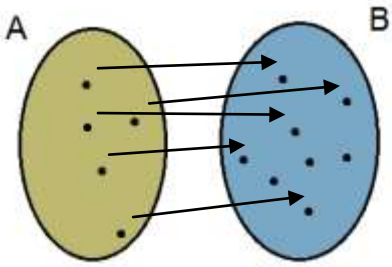


**Dependent and independent variable**
A variable, values which are given, is called an **argument** or an **independent variable**.
The other variable, values which are found by the certain rule, is called a **dependent variable**.
Usually an argument is marked as $x$ and a dependent variable is marked as $y$.

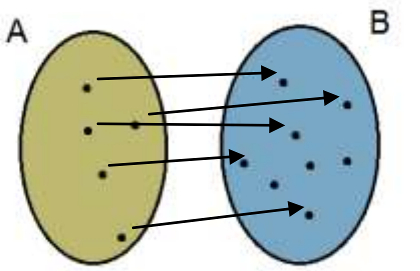
**Important characteristic of the function:**

A function relates **each** element of a set with **exactly one** element of another set.

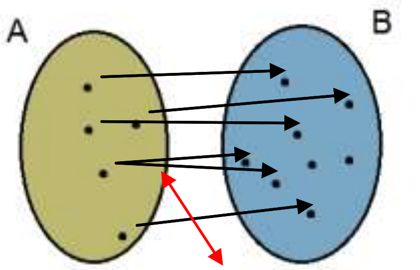
1. **… each element …**
   This means that every element in set A is related to some element in set B.




2. **…exactly one …**
   This means that the function will not give 2 or more results for the same input.




This relation is a function.




This relation is NOT a function.

If relation does not follow one or both of those rules then it is not a function.

# DEFINICE FUNKCE, ÚVOD K FUNKCÍM

### Co je funkce?

V každodenním životě se můžeme setkat s mnoha veličinami, které závisí na jedné nebo více jiných proměnných veličinách. Například teplota varu vody závisí na atmosférickém tlaku, vzrůst rostliny je závislý na slunečním světle a srážkách nebo také známky z testu závisí na přípravě, plnění domácích úkolů atd.

Říkáme, že dvě veličiny jsou funkčně závislé. Toto vyjádření použijeme přesněji v situaci, kdy každou hodnotu určité proměnné získáme dosazením hodnot jiné proměnné do určitého pravidla/ předpisu.

**Funkce** je pravidlo, které určuje, jak jedna veličina závisí na jiné/jiných veličinách.

### Definice funkce

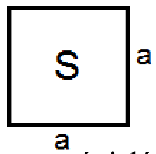
Funkce jedné proměnné na množině $A$ ($A \subset R$) je předpis, který každému číslu z množiny $A$ přiřazuje právě jedno číslo z množiny $B$ ($B \subset R$).

První veličina (proměnná) je funkcí druhé veličiny (proměnné), jestliže mezi nimi existuje zobrazení, které každé hodnotě první veličiny přiřadí právě jednu hodnotu druhé veličiny.

***Příklady:***

**1.** Vztah pro výpočet obsahu čtverce je: $S = a^2$

| **a (cm)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 12 | 50 | 51 | 100 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **S (cm$^2$)** | 1 | 4 | 9 | 16 | 144 | 2500 | 2 601 | 10 000 | 0,01 |




Jedná se o funkci. Každé hodnotě nezávislé proměnné *a* je přiřazena právě jedna hodnota závislé proměnné *S*.

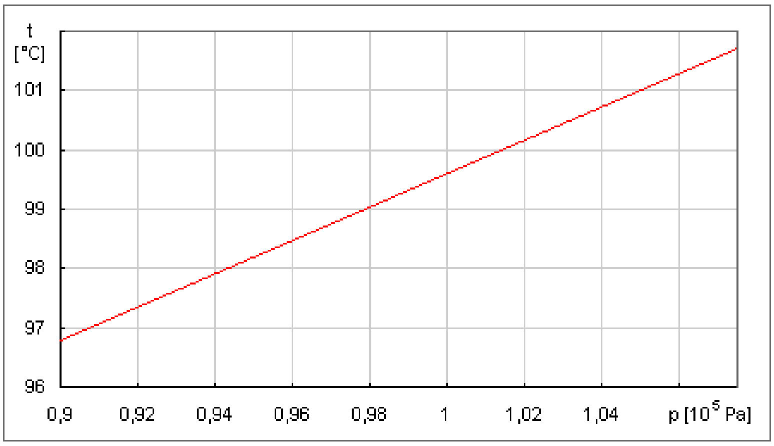
**2.** Dělení číslem 3 je také velmi jednoduchá funkce: $y = 3x$

| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 | 12 | 50 | 51 | 100 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 3 | 6 | 9 | 12 | 36 | 150 | 153 | 300 | 0,3 |

**3.** |Závislost teploty varu vody na atmosférickém tlaku:

$$t = 71{,}6 + 28 \cdot \left(\frac{p}{10\,000}\right)$$

Pro každou hodnotu atmosférického tlaku můžeme vypočítat (vyčíst z grafu) právě jednu hodnotu teploty varu vody.

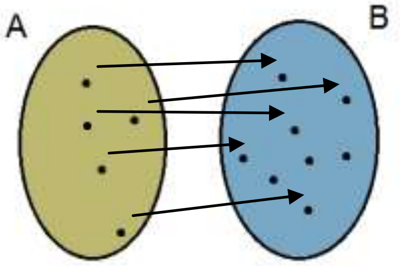


**Závislá a nezávislá proměnná**
Proměnná, jejíž hodnoty jsou dány, se nazývá **argument** nebo **nezávisle proměnná**.
Druhá proměnná, jejíž hodnoty nalezneme pomocí konkrétního předpisu, se nazývá **závislá proměnná**.
Argument obvykle značíme x a závislou proměnnou y .

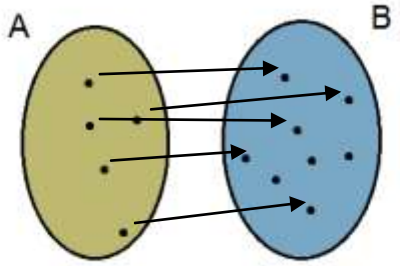
**Důležité vlastnosti funkce:**

Funkce přiřazuje **každému** prvku z množiny *A* **právě jeden** prvek jiné množiny.

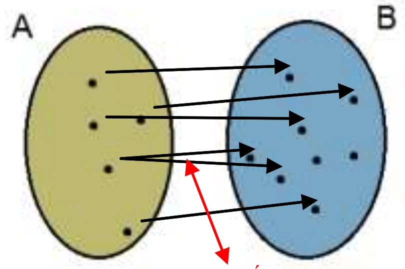
1. **… každému …**
   To znamená, že každému prvku z množiny A je přiřazen nějaký prvek v B.




2. **…právě jeden…**
   To znamená, že funkce nepřiřadí jedné vstupní hodnotě dva nebo více výsledků.




Tato závislost je funkce.




Tato závislost NENÍ funkce.

Pokud závislost nesplňuje jednu nebo obě tyto podmínky, pak se nejedná o funkci.

# REPRESENTATIONS OF FUNCTION

As you might have noticed in the previous worksheet, there are 4 ways how we can represent some function:

a) Table
b) Graph
c) Formula
d) Verbal prescription

**Representation of the function by table**

We use representation by table (or graph) if it is impossible to represent a functional dependence by a formula, or this formula is an uncomfortable for calculations.
This table represents the functional dependence between the athmospheric pressure *p* and the temperature of boiling water *t*.

| **p** ($10^5$Pa) | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **t** (°C) | 76,1 | 81,6 | 86,1 | 90,3 | 93,8 | 97 | 100 |

It is obvious that any table cannot contain all values of argument.
But useful table must contain so many values that they are enough to work or to receive additional values by interpolating the existing ones.

**Representation of the function by formula**

Many of the functions can be represented by simple formulas.
*Example:* We know the equation for the arrea S of a circle from a primary school:
$S = \pi r^2$, where *r* is the radius of the circle. This is an example of the function where each value of the independent variable *r* gives us one value of the dependent variable *S*.

We use *x* for the independent variable and *y* for the dependent variable for general cases.
The function formula is the "equation" using which we calculate just one value of y (dependent value) for every specific value of x.

<u>Function notation:</u>
We normaly write function as $f(x)$ and read this as "function *f* of *x*"
We can also use other letters for functions, most often $g(x), h(x)$ .
*Examples:*

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = 1 - 2x$
3. A tree grows 20 cm every year, so the height of the tree is the function of its age (the number of years is *x*). Name this function $g$: $g(x) = 20 \cdot x$ or another way of writing $g: y = 20 \cdot x$.

**How to work with the function formula?**

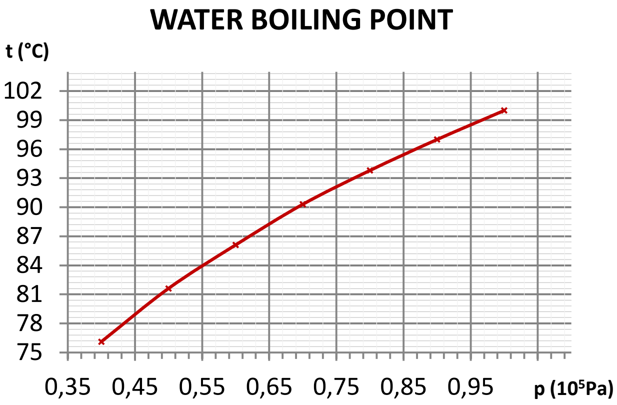
For example, we want to know the height of the tree for 13 years and 80 years.
$x = 13; f(20) = 20 \cdot 13 = 260cm = 2{,}6m$
$x = 80; f(20) = 20 \cdot \dots . = \dots \dots \dots cm = \dots \dots m$
We compute that the tree will be for 13 years 2,6 meters high and for 80 years it will be ……….. high.

Number $f(x)$ is called the **function value** or **value of the function**.

**Graphical representation of the functions**

The graph of the function $f$ is the collection of all ordered pairs $[x; f(x)]$ in the coordinate system.
To represent the function as a graph it is necessary:

1. Write a set of values of the function and its argument in the table.
2. Transfer the coordinates of the function points from the table to the coordinate system.
3. Join marked points by a smooth curve. We receive a graph of the given functional dependence.




We meet this way with the empirical functions whose values are obtained by measuring, for example, the temperature values measured during the day.

**Representation of function by the verbal precription**

We use the precription for the function for which the formula cannot be found.

**Example:** The function in which we assign a number of divisors to each natural number.

**TO PRACTISE:**

**1.** Evaulate following functions:

**a)** Given $f(x) = 1 - 2x$, find:

**I.** $f(2) =$

**II.** $f(-12) =$

**b)** Given $g(x) = \frac{6-x}{x+3}$, $x \in \langle -2; 4 \rangle$, find

**I.** $g(3) =$

**II.** $g(0{,}2) =$

**2.** Write the function that expresses the dependence:

**a)** Area S of a square on its side lenght

**b)** Lenght of the circle on its diameter.

**c)** Perimeter of isosceles triangle on the lenght of the ordinate.

**d)** Car fuel cunsumption (number of litres per 100 kilometres).

# ZPŮSOBY ZADÁNÍ FUNKCE

Jak jste si mohli všimnout v předchozím pracovním listu, existují 4 způsoby, kterými můžeme vyjádřit funkci:

a) Tabulka
b) Graf
c) Funkční předpis
d) Slovní zadání

**Určení funkce tabulkou**

Zadání funkce pomocí tabulky (grafu) se využívá, pokud není možné zadat funkční závislost předpisem nebo tento předpis není vhodný pro výpočty.
Tato tabulka představuje závislost mezi atmosférickým tlakem *p* a teplotou varu vody *t*.

| **p** ($10^5$Pa) | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **t** (°C) | 76,1 | 81,6 | 86,1 | 90,3 | 93,8 | 97 | 100 |

Je zřejmé, že do tabulky nelze zahrnout všechny hodnoty argumentu funkce.
Užitečná tabulka ale musí obsahovat dostatečné množství takových hodnot, které postačují k práci nebo které lze doplnit metodou interpolace.

**Vyjádření funkce předpisem**

Velké množství funkcí lze vyjádřit jednoduchým předpisem.
*Příklad:* Ze základní školy znáte vzorec pro výpočet obsahu kruhu:
$S = \pi r^2$, kde *r* je poloměr kruhu. Toto je příklad funkce, která každé hodnotě nezávisle proměnné *r* přiřadí jednu hodnotu závisle proměnné *S*.

V obecných případech značíme nezávisle proměnnou *x* a závisle proměnnou *y*.
Funkční předpis je„rovnice“, pomocí které pro každou určitou hodnotu x vypočítáme y (závislá proměnná).

<u>Zápis funkce:</u>
Obvykle zapisujeme funkci jako $f(x)$ a čteme „funkce *f* proměnné *x*“
Pro označení funkce můžeme použít i jiná písmena, nejčastěji $g(x), h(x)$ .
*Příklady:*

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = 1 - 2x$
3. Strom vyroste každý rok o 20 cm. Výška stromu je tedy funkcí jeho stáří (počet let označme *x*). Označme tuto funkce $g$: $g(x) = 20 \cdot x$ , jiný způsob zápisu $g: y = 20 \cdot x$.

**Jak se pracuje s předpisem funkce?**

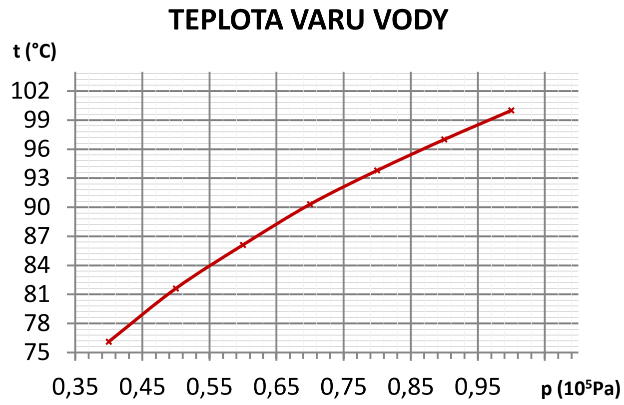
Například bychom chtěli určit výšku stromu starého 13 a 80 let.
$x = 13; f(20) = 20 \cdot 13 = 260cm = 2{,}6m$
$x = 80; f(20) = 20 \cdot \ldots. = \ldots\ldots\ldots cm = \ldots\ldots m$
Spočítali jsme, že ve 13 letech bude strom vysoký 2,6 metrů a v 80 bude ……….. vysoký.

Číslo $f(x)$ nazýváme **funkční hodnota** nebo **hodnota funkce**.

**Zadání funkce pomocí grafu**

Graf funkce $f$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x; f(x)]$ v soustavě souřadnic.
Při zadávání funkce pomocí grafu je potřeba:

1. Zapsat hodnoty funkce a argumentu do tabulky.
2. „Přenést“ souřadnice bodů z tabulky do soustavy souřadnic.
3. Proložit těmito body hladkou křivku. Obdržíme graf zadané funkční závislosti.




S funkcí zadanou tímto způsobem se setkáváme u empirických funkcí, jejichž hodnoty byly získány měřením. Příkladem můře být měření teploty v průběhu dne.

**Určení funkce slovním předpisem**
Slovní zadání funkce používáme u funkcí, u kterých nelze sestavit předpis.
Př: Funkce, která každému přirozenému číslu přiřazuje počet jeho dělitelů.

**K PROCVIČENÍ:**

**1.** Určete hodnoty následujících funkcí:

**a)** Je dáno: $f(x) = 1 - 2x$, určete:

**I.** $f(2) =$

**II.** $f(-12) =$

**b)** Je dáno $g(x) = \frac{6-x}{x+3}$, $x \in \langle -2; 4 \rangle$, určete

**I.** $g(3) =$

**II.** $g(0{,}2) =$

**2.** Zapište funkce, které vyjadřují závislost:

**a)** Obsahu čtverce na délce jeho strany.

**b)** Délky kružnice na poloměru.

**c)** Obvodu rovnostranného trojúhelníku na délce strany.

**d)** Spotřeby auta na počtu ujetých kilometrů.

# DOMAIN OF FUNCTION

**Repetition: Fill in the gaps**

The function of a single variable on set $A$ $(A \subset R)$ is a relation in which for ……………………….. is given ………………… of another set $B$ $(B \subset R)$.

The first variable is a function of the second variable if there is a relationship between them:
………………………………………………… …………….…………………………………… .
A variable, values which are given, is called an argument or an ………………………………………...
The other variable, values which are found by the certain rule, is called a …………………………….
Usually an argument is marked as …… and a …………………………. is marked as y .

## DOMAIN OF A FUNCTION $f$ $D_f$

- The domain is the set of values for which a function is defined.

| The domain is the set of all $x \in R$, for which there is $y \in R$ such that $[x; y] \in R$. |
|---|

- Simply: The domain of a function is the set of all possible $x$-values which will make the function "work" and will output real $y$-values.

### DETERMINING THE DOMAIN

1. **Representation of the function by table**

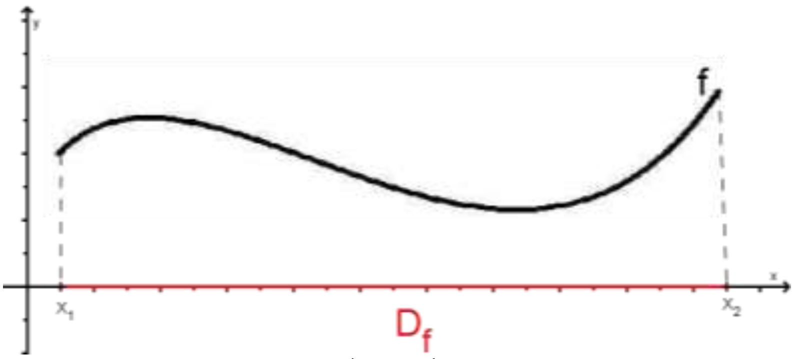
**f:**

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ | $f(x_4)$ | $f(x_5)$ | $f(x_6)$ |

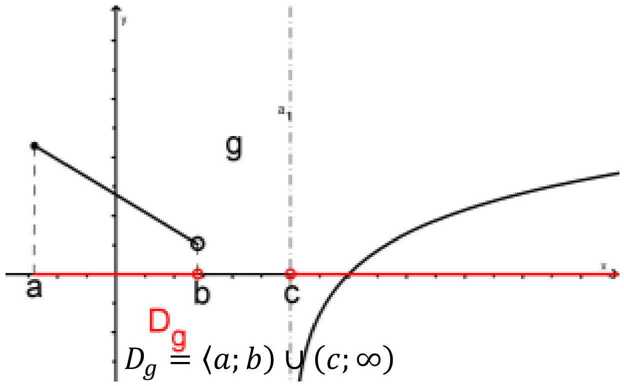
$D_f$

- The domain is the set of all $x \in R$ for which exists $y = f(x); y \in R$.
  The domain is the set of all $x \in R$ in the first row of the table.
  $\boldsymbol{D_f = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6\}}$
- Be sure to check that the table is a representation of a function!

2. **Graphical representation of the function**




$D_f = \langle x_1; x_2 \rangle$




$D_g = \langle a; b) \cup (c; \infty)$

- The domain is the set of all $x \in R$ for which exists $y = f(x); y \in R$.
  The domain is usually an interval.
- Be sure to check that the graph is a representation of a function!

3. **Representation of the function by formula**

- The domain is the set of all $x \in R$ for which the expression on the right side is defined.
  Do not forget: The denominator of a fraction cannot be zero.
  The values under a square root sign cannot be negative.
- $\boldsymbol{f: y = 2x}$ $\quad x \in R$
  $\boldsymbol{D_f = R}$
- $\boldsymbol{g: y = \sqrt{x}}$ $\quad x \geq 0$
  $\boldsymbol{D_g = \langle 0; \infty)}$
- $\boldsymbol{h: y = \frac{x^2}{4-x}}$ $\quad 4 - x > 0$
  $x < 4$
  $\boldsymbol{D_h = (-\infty; 4)}$

**Practice: Determine domains of functions:**

**1.**

***f₁:***

| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$D_{f_1} =$

**2.**

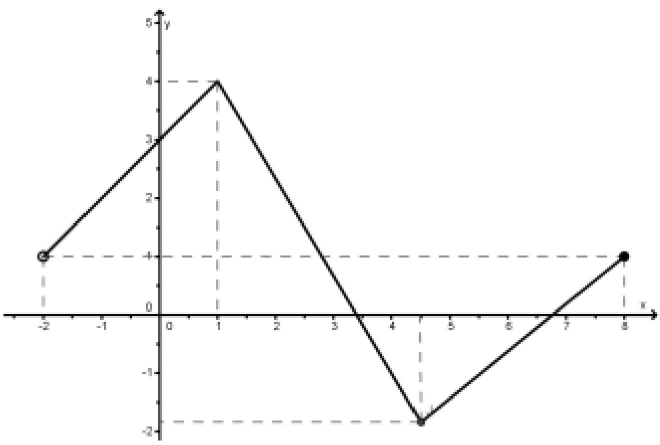
***f₁:***

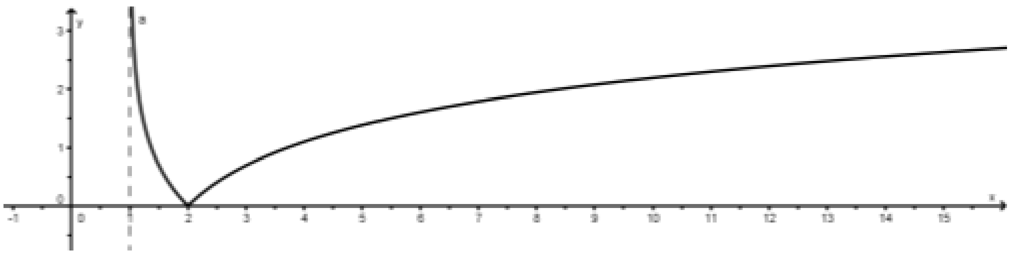
| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$D_{f_2} =$

**3.**

**4.**





**5.** $f_5 : y = \sqrt{5x + 1{,}5}$

**6.** $f_6 : y = \frac{36x^2}{6-18x}$

**7.** $f_7 : y = \frac{4x+52}{\sqrt{2x-8}}$

**8.** $f_8 : y = \frac{2}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{4x-4}$

**9.** $f_9 : y = \sqrt{x-5} + \sqrt{6-3x}$

**10.** $f_{10} : y = \sqrt{\frac{5x+3}{3x-2}}$

# DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE

**Opakování: Doplňte**

Funkce jedné proměnné na množině $A$ ($A \subset R$) je předpis, který …………………………………….přiřazuje ……………………………………….. $B$ ($B \subset R$).

První veličina (proměnná) je funkcí druhé veličiny (proměnné), jestliže mezi nimi existuje zobrazení, které ………………………………………………………………………………………..

Proměnná, jejích hodnoty jsou dány, se nazývá **argument** nebo ………………………………...

Druhá proměnná, jejích hodnoty nalezneme pomocí konkrétního předpisu, se nazývá …………………..

Argument obvykle značíme … a závislou proměnnou …… .

## DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE $f$ $D_f$

- Definiční obor je množina všech čísel, pro která je funkce definována.

| Definiční obor je množina všech $x \in R$, pro které existuje $y \in R$ tak, že $[x; y] \in R$. |
|---|

- Zjednodušeně: Definiční obor funkce je množina všech možných hodnot, pro které bude funkce „pracovat“ a bude produkovat reálná čísla *y*.

### URČENÍ PŘEDPISU FUNKCE

**1. zadání funkce tabulkou:**

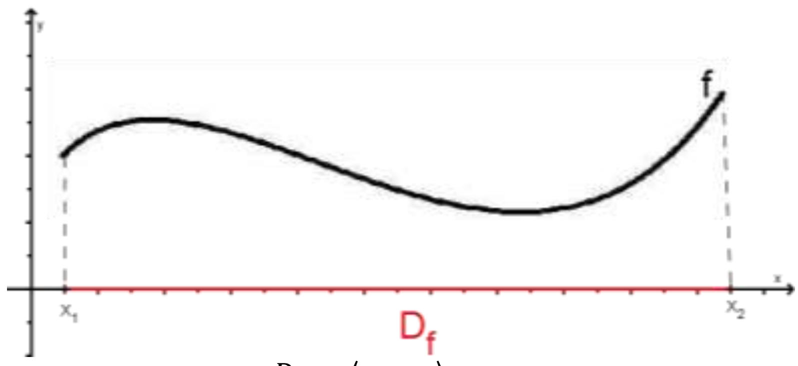
*f*:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ | $f(x_4)$ | $f(x_5)$ | $f(x_6)$ |

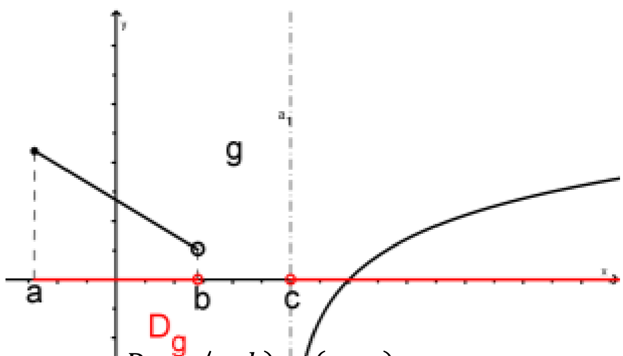
$D_f$

- Definiční obor je množina všech $x \in R$ , pro které existuje $y \in R; y = f(x)$.
  Definiční obor je množina všech $x \in R$ v prvním řádku tabulky.
  $\boldsymbol{D_f = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6\}}$
- Nezapomeňte ověřit, že tabulka je zadáním funkce!

**2. Zadání funkce grafem**




$D_f = \langle x_1; x_2 \rangle$




$D_g = \langle a; b) \cup (c; \infty)$

- Definiční obor je množina všech $x \in R$ , pro které existuje $y \in R; y = f(x)$.
  Definiční obor je obvykle interval.

- Nezapomeňte ověřit, že graf je zadáním funkce!

**3. Funkce určená předpisem**

- Definiční obor je množina $x \in R$, for pro která je definován výraz na pravé straně rovnice.
  Nezapomeňte: Dělitel zlomku nesmí být 0.
  Výraz pod druhou odmocninou nesmí být záporný.
- $\boldsymbol{f: y = 2x}$ $\quad x \in R$
  $\boldsymbol{D_f = R}$
- $\boldsymbol{g: y = \sqrt{x}}$ $\quad x \geq 0$
  $\boldsymbol{D_g = \langle 0; \infty)}$
- $\boldsymbol{h: y = \frac{x^2}{4-x}}$ $\quad 4 - x > 0$
  $x < 4$
  $\boldsymbol{D_h = (-\infty; 4)}$

**Cvičení: Určete definiční obory funkcí:**

**1.**

***f₁:***

| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$D_{f_1} =$

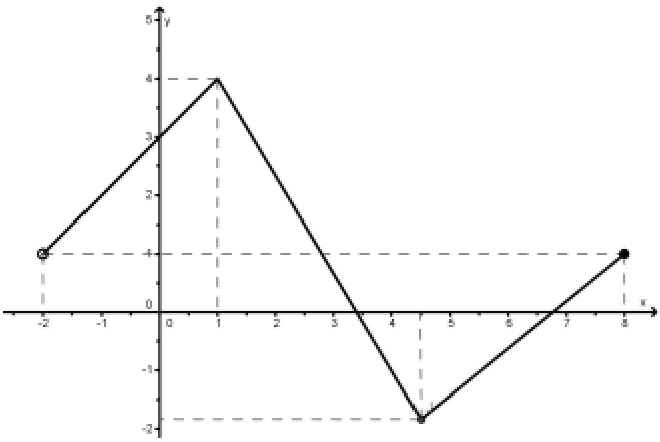
**2.**

***f₁:***

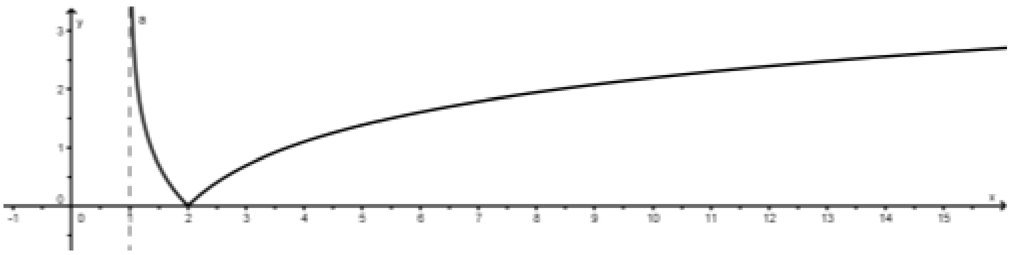
| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$D_{f_2} =$

**3.**



**4.**



**5.** $f_5: y = \sqrt{5x + 1{,}5}$

**6.** $f_6: y = \frac{36x^2}{6-18x}$

**7.** $f_7: y = \frac{4x+52}{\sqrt{2x-8}}$

**8.** $f_8: y = \frac{2}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{4x-4}$

**9.** $f_9: y = \sqrt{x-5} + \sqrt{6-3x}$

**10.** $f_{10}: y = \sqrt{\frac{5x+3}{3x-2}}$

# RANGE OF FUNCTION

**Repetition: Fill in the gaps**

The function of a single variable on set $A$ $(A \subset R)$ is a relation in which for ……………………….. is given ………………… of another set $B$ $(B \subset R)$.

The first variable is a function of the second variable if there is a relationship between them:

………………………………………………… …………….……………………………………… .

The domain is …………………………………………………………………………………………….

## RANGE OF A FUNCTION $f$ $\boldsymbol{H_f}$

- The range is the set of y-values of a function, it is the set of dependent variables.

> The range is the set of all $y \in R$, for which there is $x \in D_f$ such that $[x; y] \in R$.

- Simply: The range is the set of all possible output values which result from using the function formula.

### DETERMINING THE RANGE

**1. Representation of the function by table**

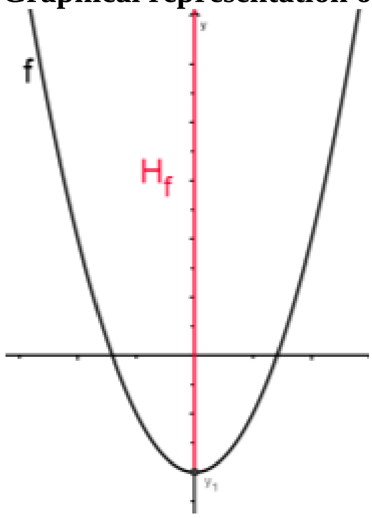
***f*:**

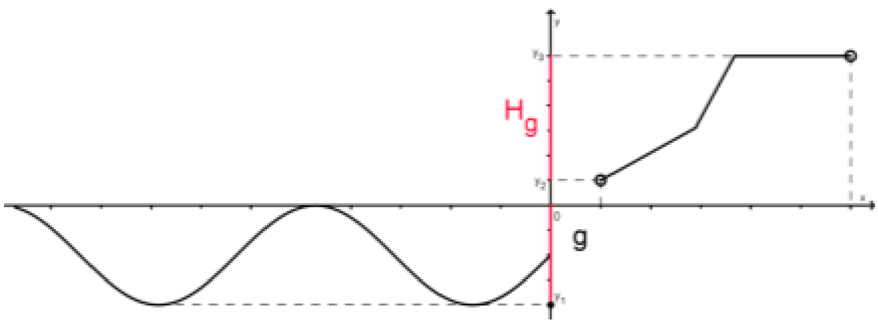
| $\boldsymbol{x}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{y}$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ | $f(x_4)$ | $f(x_5)$ | $f(x_6)$ |

$\boldsymbol{H_f}$

- The range is the set of all $y \in R$ for which exists $x \in R$: $y = f(x)$.
  The range is the set of all $y \in R$ in the second row of the table.
  $\boldsymbol{H_f = \{f(x_1); f(x_2); f(x_3); f(x_4); f(x_5); f(x_6)\}}$
- Be sure to check that the table is a representation of a function!

**2. Graphical representation of the function**




$H_f = \langle y_1; \infty)$ $\qquad$ $H_g = \langle y_1; 0\rangle \cup (y_2; y_3\rangle$

- The range is the set of all $x \in R$ for which exists $x \in D_f$; $y \in f(x)$.
  The range is usually an interval.
- Be sure to check that the graph is a representation of a function!

## 3. Representation of the function by formula

- In order to determine a function's range, we need to determine the domain.
  Analyze the function to determine any values of y for which there isn´t a real value of x.

  **Example:** $f: y = \frac{2}{4-x}$; 0 can't be a part of the range because $0 = \frac{2}{4-x}$ can't be true.
- Determine the range is based on the domain.
  **Example:** $\boldsymbol{f: y = x^2 - 4; D_f = R}$**.** If we assign a real number for x. then $x^2 \geq 0$. In the formula there is a substraction of number 4. The range is all real numbers greater than or equal to -4, $H_f = \langle -4; \infty)$.

**Practice: Determine ranges of functions:**

**1.**

***f₁:***

| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$H_{f_1} =$

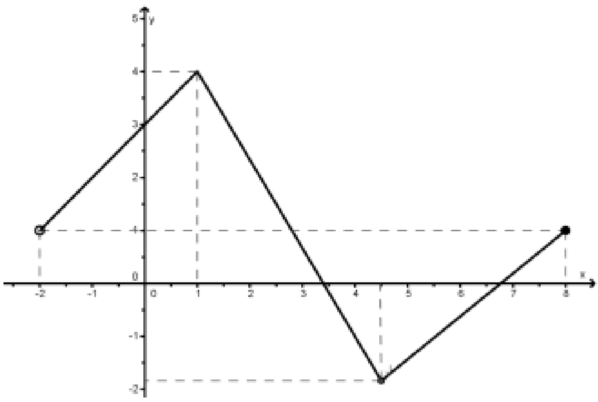
**2.**

***f₁:***

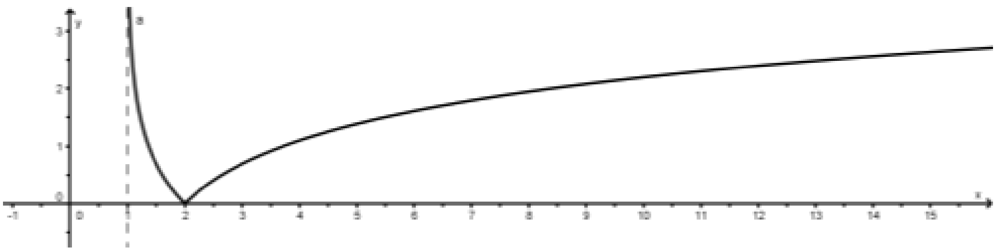
| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$H_{f_2} =$

**3.**



**4.**



**5.** $f_5: y = x^2$

**6.** $f_6: y = \frac{1}{x}$

**7.** $f_7: y = \sqrt{x}$

**8.** $f_8: y = |x|$

**9.** $f_9: y = |x| + 3$

# OBOR HODNOT FUNKCE

**Opakování: Doplňte**

Funkce jedné proměnné na množině $A$ ($A \subset R$) je předpis, který ……………………………………přiřazuje ……………………………………….. $B$ ($B \subset R$).

První veličina (proměnná) je funkcí druhé veličiny (proměnné), jestliže mezi nimi existuje zobrazení, které ………………………………………………………………………………………………..

Definiční obor funkce je …………………………………………………………………………….

## OBOR HODNOT FUNKCE *f* $H_f$

- Obor hodnot funkce je množina všech hodnot funkce *y*, je to množina všech závislých proměnných.

| Obor hodnot funkce *f* je množina všech $y \in R$, pro které existuje$x \in D_f$ takové, že $[x; y] \in R$. |
|---|

- Jednoduše: Obor hodnot je množina všech možných výsledků, které získáme dosazením do předpisu.

### URČENÍ PŘEDPISU

1. **Funkce zadaná tabulkou**

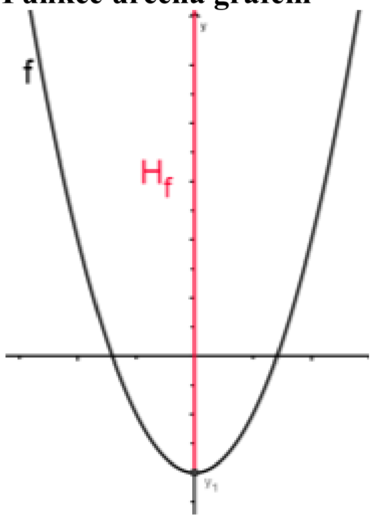
*f:*

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ | $f(x_4)$ | $f(x_5)$ | $f(x_6)$ |

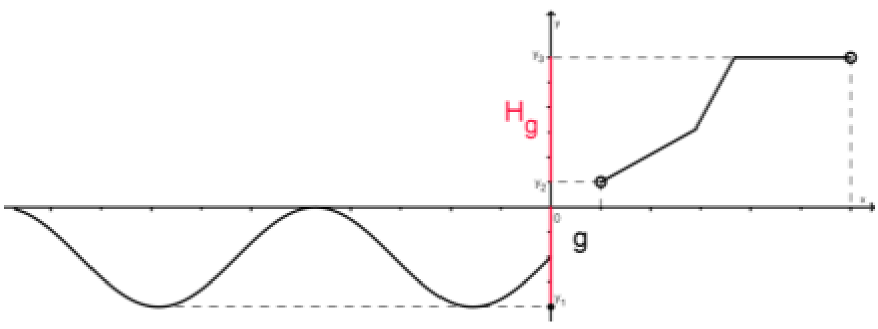
$H_f$

- Obor hodnot je množina všech $y \in R$ pro které existuje $x \in R: y = f(x)$.
  Obor hodnot je množina všech $y \in R$ ve druhém řádku tabulky.
  $\boldsymbol{H_f = \{f(x_1); f(x_2); f(x_3); f(x_4); f(x_5); f(x_6)\}}$
- Ujistěte se, že tabulka je zadáním funkce!

2. **Funkce určená grafem**




$H_f = \langle y_1; \infty)$




$H_g = \langle y_1; 0\rangle \cup (y_2; y_3\rangle$

- Obor hodnot je množina všech $x \in R$ , pro které existuje $x \in D_f; y \in f(x)$.
  Obor hodnot je obvykle interval.
- Ujistěte se, že graf je zadáním funkce!

## 3. Funkce zadaná předpisem

- Při určení oboru hodnot potřebujeme nejprve určit definiční obor..
  Analyzujeme funkci, abychom určili všechny hodnoty y, pro které neexistuje reálné x.

  **Příklad:** $f: y = \frac{2}{4-x}$; 0 nemůže patřit do oboru hodnot, protože rovnost $0 = \frac{2}{4-x}$ nikdy neplatí.
- Určeni oboru hodnot je založeno na definičním oboru funkce..
  **Příklad:** $\boldsymbol{f: y = x^2 - 4; D_f = R.}$ Pokud za x dosadíme libovolné reálné číslo, pak. $x^2 \geq 0$.
  V předpisu je odečtena 4. Obor hodnot tedy budou všechna čísla vetší nebo rovna -4,
  $H_f = \langle -4; \infty)$.

**Cvičení: Určete obor hodnot:**

**1.**

***f₁:***

| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$H_{f_1} =$

**2.**

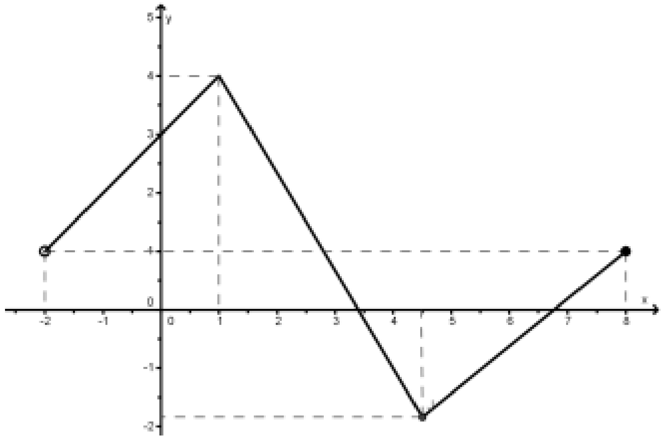
***f₁:***

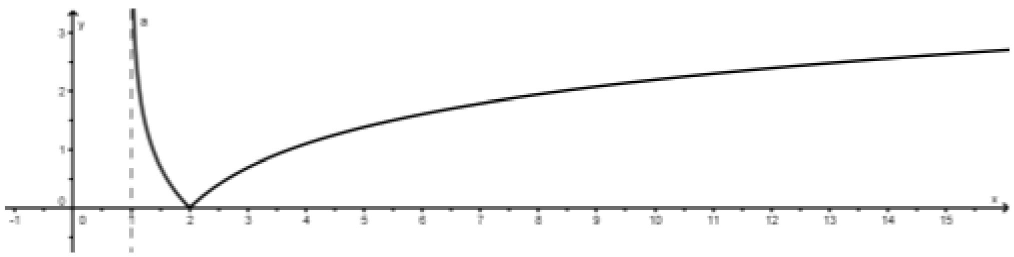
| $x$ | -2 | 1 | 5 | 6 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 6 | 8 | 9 | 10 |

$H_{f_2} =$

**3.**

**4.**





**5.** $f_5: y = x^2$

**6.** $f_6: y = \frac{1}{x}$

**7.** $f_7: y = \sqrt{x}$

**8.** $f_8: y = |x|$

**9.** $f_9: y = |x| + 3$

# WORKSHEET –definition of function, the domain and function range

**I. Decide which of following graphs/tables are the representation of a function. If it is a function, specify the domain and the range:**

**1.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **x** | -3 | 0 | 2 | 8 | -1 | 3 |
| **y** | 1 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

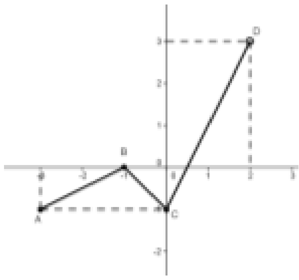
$D_{f_1} =$
$H_{f_1} =$

**2.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **x** | -3 | 5 | 2 | 8 | -3 | 3 |
| **y** | 6 | -2 | 5 | 1 | 2 | 3 |

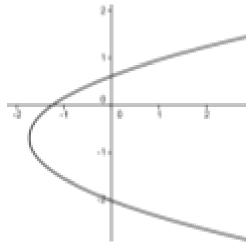
$D_{f_2} =$
$H_{f_2} =$

**3.**



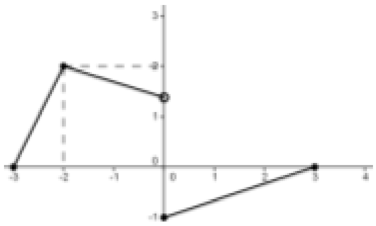
$D_{f_3} =$
$H_{f_3} =$

**4.**



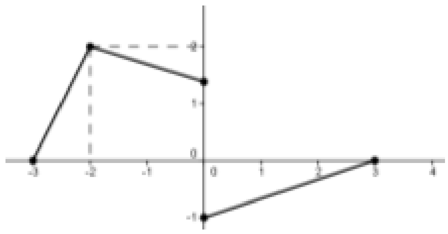
$D_{f_4} =$
$H_{f_4} =$

**5.**



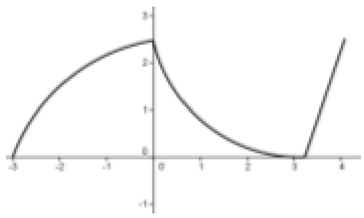
$D_{f_5} =$
$H_{f_5} =$

**6.**



$D_{f_6} =$
$H_{f_6} =$

**7.**



$D_{f_7} =$

$H_{f_7} =$

**II. Decide if the following functions are equal. Mark your answer in the box. (yes – Y, no - N)**

**1.** $f_1 : y = x^2$

$f_2 = \frac{x^3}{x}$

| Y | N |
|---|---|
| | |

**2.** $g_1 : y = \frac{x+3}{x^2+6x+9}$

$g_2 : y = \frac{1}{x+3}$

| Y | N |
|---|---|
| | |

**3.** $h_1 : y = \frac{x^2-9}{x-3}$

$h_2 : y = x + 3$

| Y | N |
|---|---|
| | |

## III. Determine the domains of the following functions:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_1: y = x^5 - x + 56$ | $D_{f_1} =$ | $f_6: y = \dfrac{x+6}{\sqrt{x+3}}$ | $D_{f_6} =$ |
| $f_2: y = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$ | $D_{f_2} =$ | $f_7: y = \dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+3}}$ | $D_{f_7} =$ |
| $f_3: y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 7x + 12}$ | $D_{f_3} =$ | $f_8: y = \sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}}$ | $D_{f_8} =$ |
| $f_4: y = \sqrt{x - 3}$ | $D_{f_4} =$ | $f_9: y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ | $D_{f_9} =$ |
| $f_5: y = \sqrt{\lvert x + 6\rvert}$ | $D_{f_5} =$ | $f_{10}: y = \sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}} + \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ | $D_{f_{10}} =$ |

## IV. Given functions *f, g, h*. Match the correct number with the value of the function.

$\boldsymbol{f: y = x^2 - 2x + 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g: y = \sqrt{x+6}}$

$\boldsymbol{h: y = 3 - 5x}$

| | |
|---|---|
| **A** | $f(1)$ |
| **B** | $g(10)$ |
| **C** | $h(\sqrt{2})$ |
| **D** | $f(\sqrt{2})$ |
| **E** | $f(0)$ |
| **F** | $h(-2)$ |

| | |
|---|---|
| **1** | 0 |
| **2** | 13 |
| **3** | 4 |
| **4** | 1 |
| **5** | $3 - 5\sqrt{2}$ |
| **6** | $3 - 2\sqrt{2}$ |

| | |
|---|---|
| **A** | |
| **B** | |
| **C** | |
| **D** | |
| **E** | **4** |
| **F** | |

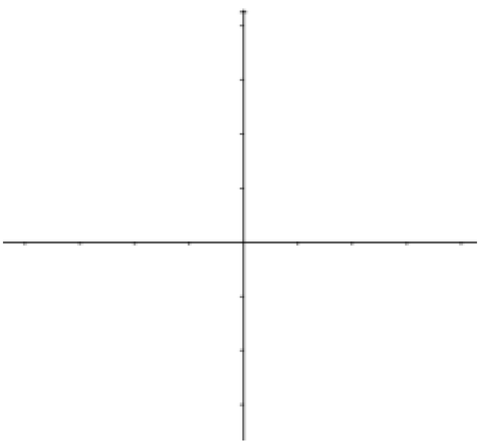
## V. Given $f: y = \frac{4x^2+2}{3-4x^2}$. Find which of following numbers belong to the range of the function *f*. (Fill in the gap with one of following symbols: $\in, \notin$).

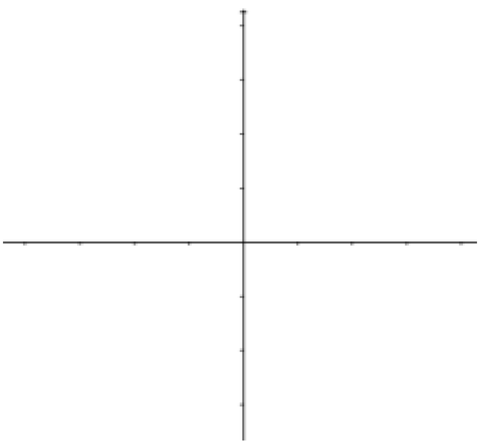
$-6 \,\square\, H_f$ $\qquad$ $0 \,\square\, H_f$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \,\square\, H_f$

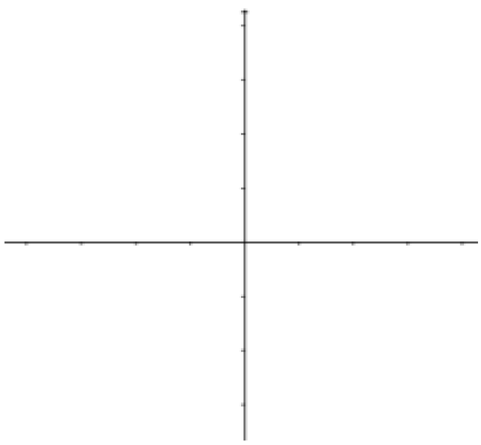
$\frac{3}{2} \,\square\, H_f$ $\qquad$ $-2 \,\square\, H_f$

## VI. Draw a graph of a function which domain is the interval $\langle -3; 5\rangle$ and the range of the function is:

**a)** $\langle -4; 2\rangle$ $\qquad$ **b)** $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 3,5\}$ $\qquad$ **c)** $(-\infty; 3)$







# PRACOVNÍ LIST – definice funkce, definiční obor, obor hodnot

## I. Rozhodněte, které z následujících grafů/tabulek jsou zadáním funkce. U funkcí určete definiční obor a obor hodnot:

**1.**

| x | -3 | 0 | 2 | 8 | -1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

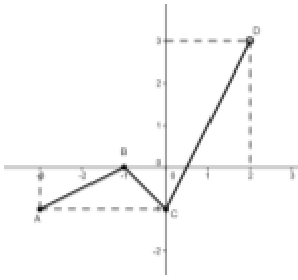
$D_{f_1} =$
$H_{f_1} =$

**2.**

| x | -3 | 5 | 2 | 8 | -3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 6 | -2 | 5 | 1 | 2 | 3 |

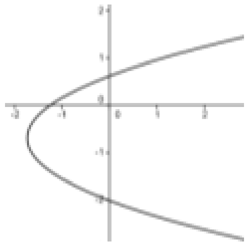
$D_{f_2} =$
$H_{f_2} =$

**3.**



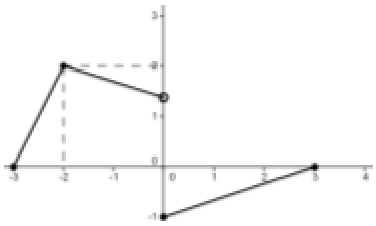
$D_{f_3} =$
$H_{f_3} =$

**4.**



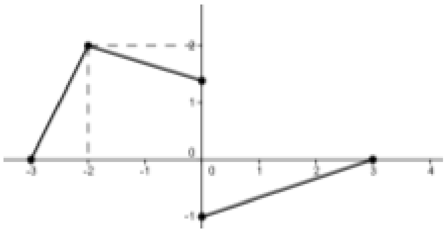
$D_{f_4} =$
$H_{f_4} =$

**5.**



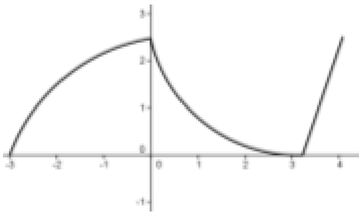
$D_{f_5} =$
$H_{f_5} =$

**6.**



$D_{f_6} =$
$H_{f_6} =$

**7.**



$D_{f_7} =$

$H_{f_7} =$

## II. Rozhodněte, zda se dané funkce rovnají. Svou odpověď vyznačte do příslušného pole. (Ano – A, ne - N)

**1.** $f_1: y = x^2$

$f_2 = \frac{x^3}{x}$

| A | N |
|---|---|
| | |

**2.** $g_1: y = \frac{x+3}{x^2+6x+9}$

$g_2: y = \frac{1}{x+3}$

| A | N |
|---|---|
| | |

**3.** $h_1: y = \frac{x^2-9}{x-3}$

$h_2: y = x + 3$

| A | N |
|---|---|
| | |

## III. Určete definiční obory následujících funkcí:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_1\colon y = x^5 - x + 56$ | $D_{f_1} =$ | $f_6\colon y = \dfrac{x+6}{\sqrt{x+3}}$ | $D_{f_6} =$ |
| $f_2\colon y = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$ | $D_{f_2} =$ | $f_7\colon y = \dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+3}}$ | $D_{f_7} =$ |
| $f_3\colon y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 7x + 12}$ | $D_{f_3} =$ | $f_8\colon y = \sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}}$ | $D_{f_8} =$ |
| $f_4\colon y = \sqrt{x-3}$ | $D_{f_4} =$ | $f_9\colon y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ | $D_{f_9} =$ |
| $f_5\colon y = \sqrt{\lvert x+6 \rvert}$ | $D_{f_5} =$ | $f_{10}\colon y = \sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}} + \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ | $D_{f_{10}} =$ |

## IV. Jsou dány funkce *f, g, h*. Přiřaďte správně funkční hodnotu (písmeno) k číslu.

$\boldsymbol{f\colon y = x^2 - 2x + 1}$

$\boldsymbol{g\colon y = \sqrt{x+6}}$

$\boldsymbol{h\colon y = 3 - 5x}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A** | $f(1)$ | | **1** | 0 |
| **B** | $g(10)$ | | **2** | 13 |
| **C** | $h(\sqrt{2})$ | | **3** | 4 |
| **D** | $f(\sqrt{2})$ | | **4** | 1 |
| **E** | $f(0)$ | | **5** | $3 - 5\sqrt{2}$ |
| **F** | $h(-2)$ | | **6** | $3 - 2\sqrt{2}$ |

| | |
|---|---|
| **A** | |
| **B** | |
| **C** | |
| **D** | |
| **E** | |
| **F** | |

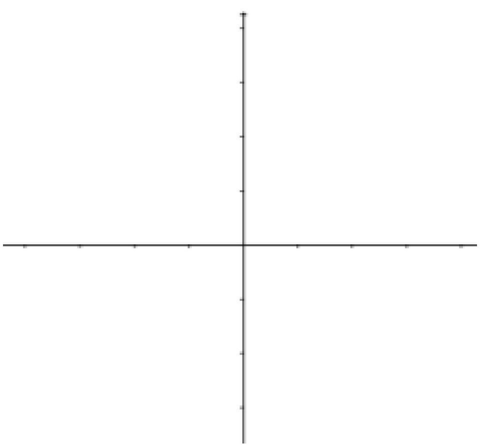
## V. Je dána funkce $f\colon y = \frac{4x^2+2}{3-4x^2}$. Určete, která z následujících čísel patří do oboru hodnot funkce *f* (Doplňte jeden z následujících symbolů: $\in, \notin$).

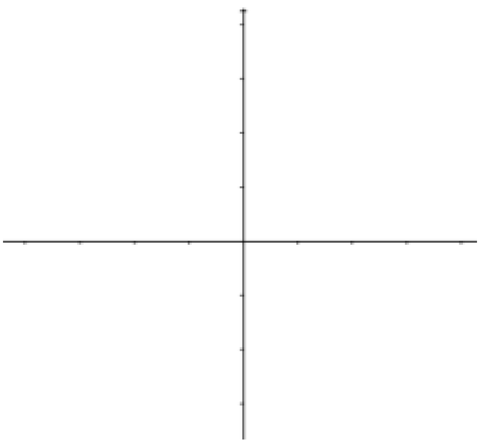
$-6 \ \square\ H_f$ $\qquad 0 \ \square\ H_f$ $\qquad \frac{1}{2} \ \square\ H_f$

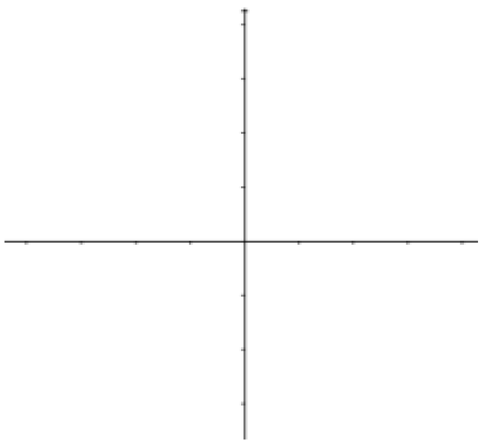
$\frac{3}{2} \ \square\ H_f$ $\qquad -2 \ \square\ H_f$

## VI. Načrtněte grafy funkcí, jejichž definiční obor je interval $\langle -3; 5\rangle$ a obor hodnot je:

a) $\langle -4; 2\rangle$ b) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 3{,}5\}$ c) $(-\infty; 3)$







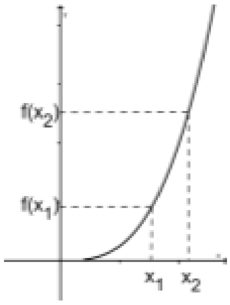
# PROPERTIES OF FUNCTION – monotonicity, one-to-one function

In this worksheet the concept of a monotonic function is discussed and the method to determine a monotonicity is introduced.

### INCREASING FUNCTION

- A function $f$ is called increasing on an interval if the function value increases as the independent value increases.

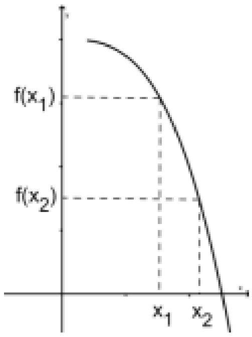
$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: if } \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \text{ then } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$$




### DECREASING FUNCTION

- A function $f$ is called decreasing on an interval if the function value decreases as the independent value increases.

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: if } \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \text{ then } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$$

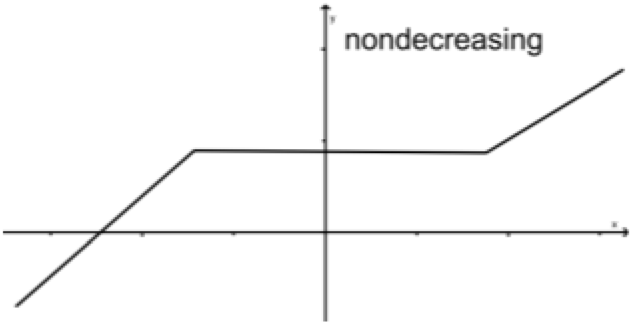


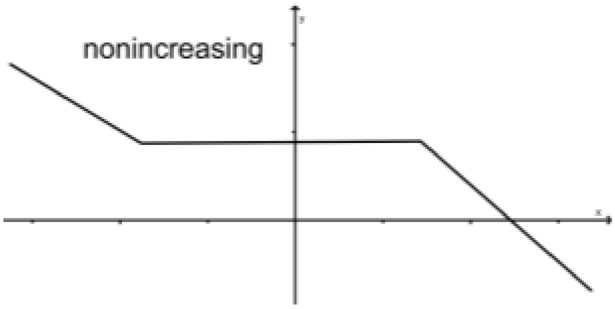

### NONINCREASING FUNCTION

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: if } \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \text{ then } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$$

### NONDECREASING FUNCTION

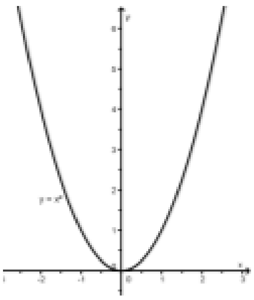
$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: if } \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \text{ then } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$$




### MONOTONICITY

- A function which is **nonincreasing or nondecreasing** is called monotonicity on its domain.
- The function is also called monotonic.
- A function which is **increasing or nondecreasing** is called **strictly monotonic** on its domain.



This function is decreasing in the interval of $x \in (-\infty; 0\rangle$
This function in increasing in the interval of $x \in \langle 0; \infty)$

The function is not monotonic on its domain $D_f = R$.

## ONE-TO-ONE FUNCTIONS

- A function for which every element of the range of the function corresponds to exactly one element of the domain.
  One-to-one function relates each value of the independent variable *x* to the single value of the dependent variable *y*.

**A function $y = f(x)$ is called an one-to-one function if for each *y* from the range of *f* there exists exactly one *x* in the domain of *f* which is related to *y*.**

$$\forall y \in H_f\ \exists!\, x \in D_f : y = f(x)$$

Otherwise

$$\forall x_1; x_2 \in D_f : if\ x_1 \neq x_2, then\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Example:**

**1.** ***f*:**

| *x* | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 0 | 1 | 2 | 8 | 9 | 3 | -6 |

Function *f* is one-to-one**.**

**2.** ***g*:**

| *x* | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 9 | 6 | 3 | 1 | 5 | 6 | 8 |

Function $g$ is not one-to-one because $g(2) = g(2) = 6$.

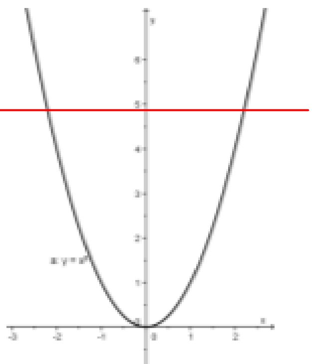
**3.** ***h*:**

| *x* | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | -5 | -4 | -3 | -3 | -4 | -5 | -6 |

*h* is not a function!

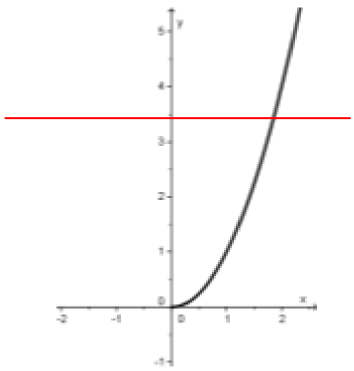
For graph of function we can do a **horizontal line test.**
The graph of a function is the grapf of an one-to-one function if only and only if no horizontal line intersects the graph at more than one point.

**4.**



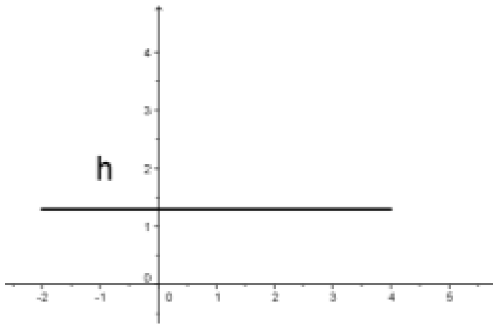
The function is not one-to-one.

**5.**



The function is one-to-one.

**6.**




The function is not one-to-one

**7.** $f: y = x^2; D_f = R$

This function is not one-to.one**.**

but

**8.** $f: y = x^2; D_f = \langle 0; \infty)$

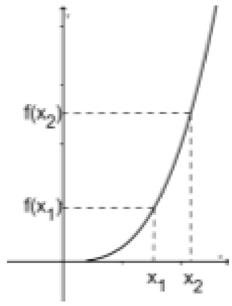
This function is one-to-one.

**IF THE FUNCTION IS INCREASING OR DECREASING, THEN IT IS AN ONE-TO-ONE FUNCTION.**

# VLASTNOSTI FUNKCE – monotónnost, prostá funkce

V tomto pracovním listu je vysvětlen pojem monotónnost a způsob rozpoznání monotónnosti.

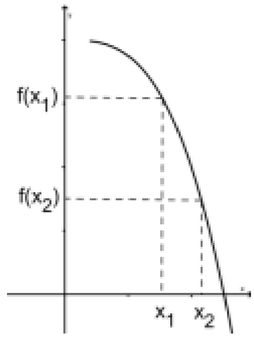
### ROSTOUCÍ FUNKCE




- Řekneme, že funkce je rostoucí na intervalu, jestliže s rostoucími hodnotami argumentu roste i funkční hodnota.

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: }\textbf{jestliže } \boldsymbol{x_1 < x_2} \textbf{ pak } \boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$$

### KLESAJÍCÍ FUNKCE




- Řekneme, že funkce je klesající na intervalu, jestliže s rostoucími hodnotami argumentu klesá funkční hodnota.

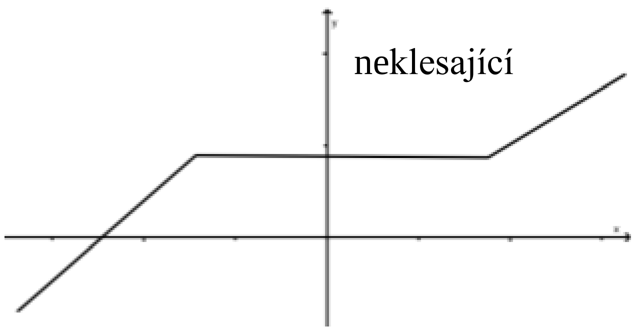
$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: }\textbf{jestliže } \boldsymbol{x_1 < x_2} \textbf{ pak } \boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$$

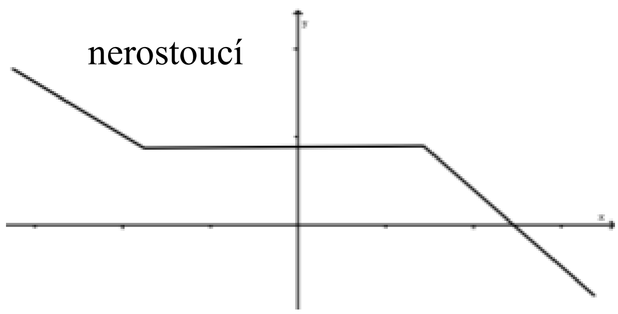
### NEROSTOUCÍ FUNKCE

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: }\textbf{jestliže } \boldsymbol{x_1 < x_2} \textbf{ pak } \boldsymbol{f(x_1) \geq f(x_2)}$$

### NEKLESAJÍCÍ FUNKCE

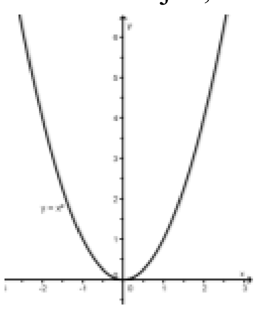
$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}\text{: }\textbf{jestliže } \boldsymbol{x_1 < x_2} \textbf{ pak } \boldsymbol{f(x_1) \leq f(x_2)}$$




### MONOTÓNNOST

- Monotónní nazveme funkci, která je na celém definičním oboru **nerostoucí nebo** je na celém definičním oboru **neklesající.**
- Funkce, která je na celém svém definičním oboru rostoucí nebo je na celém definičním oboru klesající, se nazývá **ryze monotónní.**



Tato funkce je klesající pro $x \in (-\infty; 0\rangle$
Tato funkce je rostoucí pro $x \in \langle 0; \infty)$

Tato funkce není monotónní na svém definičním oboru $D_f = R$.

## Prostá funkce

- Prostá funkce je funkce, ve které dvěma různým funkčním hodnotám odpovídají různé hodnoty argumentu.
  Prostá funkce přiřazuje dvěma různým funkčním hodnotám různé hodnoty argumentů.

**Funkce $y = f(x)$ je prostá, jestliže pro každé $y$ z oboru hodnot existuje právě jedno $x$ z definičního oboru funkce, pro které $y = f(x)$ .**

$$\forall y \in H_f\ \exists!\, x \in D_f : y = f(x)$$

jinak
$$\forall x_1; x_2 \in D_f : \textit{jestliže } x_1 \neq x_2, \textit{pak } f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Příklad:**

**1.**

*f:*

| $x$ | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 2 | 8 | 9 | 3 | -6 |

Funkce f je prostá**.**

**2.**

*g:*

| $x$ | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 6 | 3 | 1 | 5 | 6 | 8 |

Funkce není prostá, protože $g(2) = g(2) = 6$.

**3.**

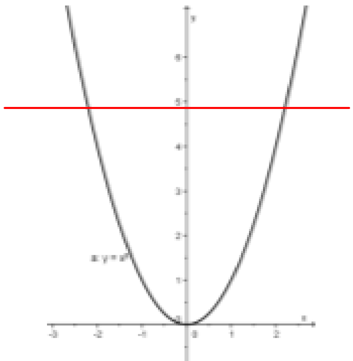
*h:*

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -5 | -4 | -3 | -3 | -4 | -5 | -6 |

*h* není funkce!

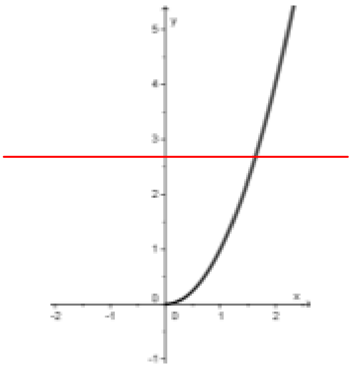
Pro funkci zadanou grafem můžeme provést test pomocí vodorovné přímky.
Graf funkce je grafem prosté funkce právě tehdy, když libovolná vodorovná přímka protne graf nejvýše v jednom bodě (jeden nebo žádný průsečík).

**4.**



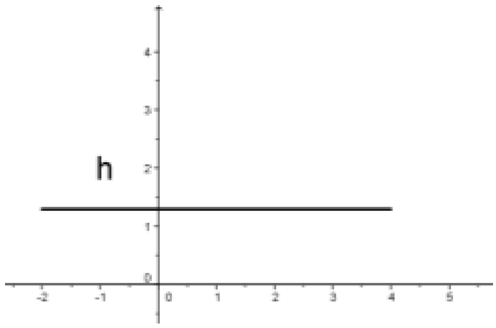
Funkce není prostá.

**5.**



Funkce je prostá.

**6.**




Funkce není prostá.

**7.** $f: y = x^2; D_f = R$

Tato funkce není prostá**.**

ale

**8.** $f: y = x^2; D_f = \langle 0; \infty)$

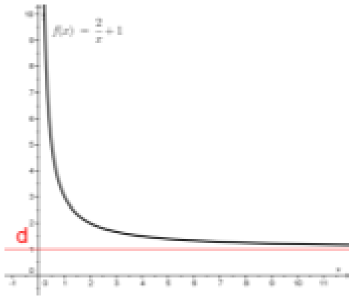
Tato funkce je prostá.

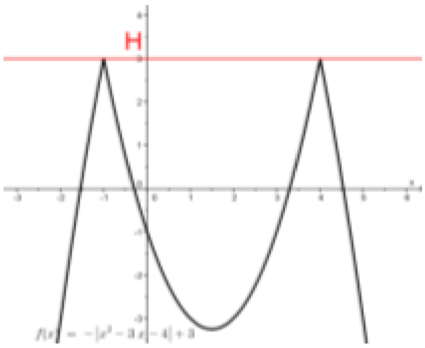
**JESTLIŽE JE FUNKCE ROSTOUCÍ NEBO KLESAJÍCÍ, PAK JE PROSTÁ.**

# PROPERTIES OF FUNCTION – boundary, extremes, periodic

## BOUNDED FUNCTION

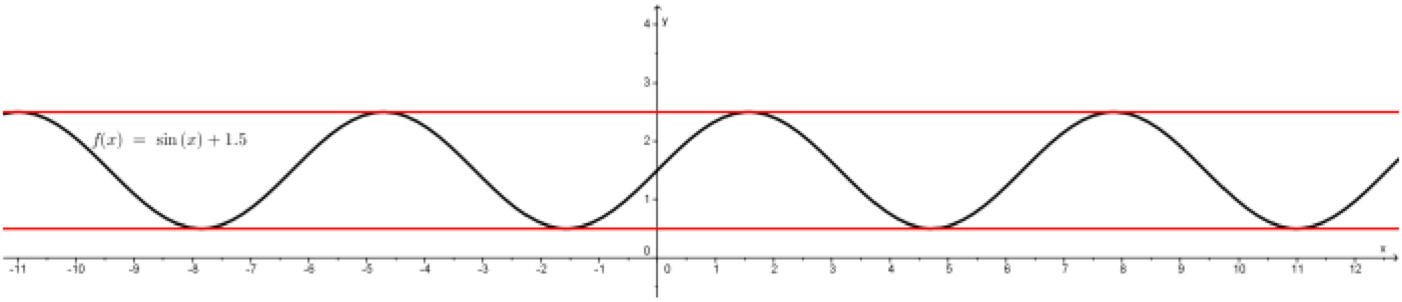
- We say that a real function *f* is **bounded from below** if there is a number *d* such that for all *x* from the domain $D_f$ one has $f(x) \geq d$.



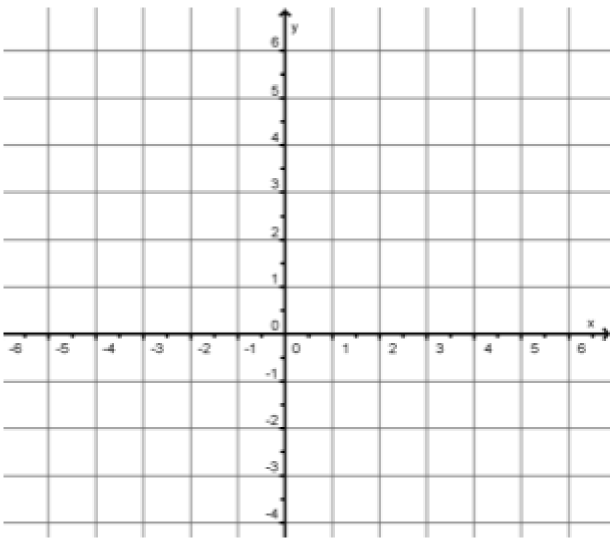




- We say that a real function *f* is **bounded from above** if there is a number H such that for all *x* from the domain $D_f$ one has $f(x) \leq d$.

- We say that a real function *f* is **bounded** if it is bounded both from above and below.




**Practice:**
Draw a graph of a function which is even and bounded from below:



**Example:**
Determine if $f: y = \frac{2}{x^2+1}$ is bounded.

$$x^2 \geq 0$$
$$x^2 + 1 \geq 1$$
$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{1}$$
$$\frac{2}{x^2+1} \leq 2$$

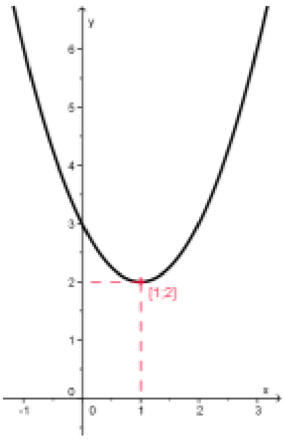
$$x^2 \geq 0$$
$$x^2 + 1 > 0;\ 2 > 0$$
$$\frac{2}{x^2+1} > 0$$

$$0 < \frac{2}{x^2+1} \leq 2$$
The function is bounded.

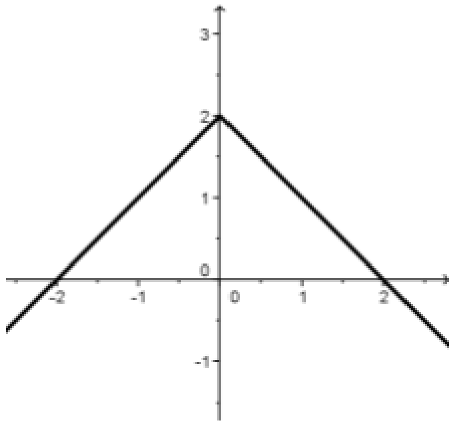
## EXTREME VALUES OF FUNCTIONS

- When an output value of a function is a maximum or minimum over the entire domain of the function, the value is called the maximum or the minimum, as defined below.

**Function $f$ has maximum in point $a$ if and only if for all $x \in D_f$ is $f(x) \leq f(a)$.**
**Function $f$ has minimum in point $b$ if and only if for all $x \in D_f$ is $f(x) \geq f(b)$.**



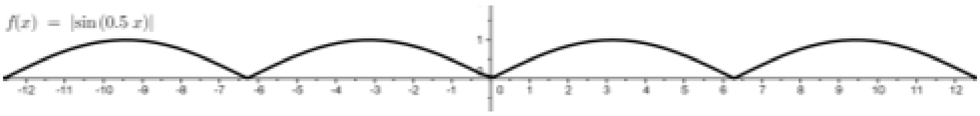

This function has a minimum for $x = 1$: $f(1) = 2$



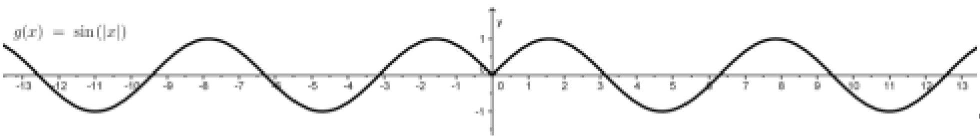
This function has a maximum for $x = 0$: $f(0) = 2$

## PERIODIC FUNCTION

**A function $f$ is said to be periodic with period $p$ ($p \in R^+$) if for each $x \in D_f$ also $(x+p) \in D_f$ and one has $f(x) = f(x+np)$ for $n = 1, 2, 3, ..$**

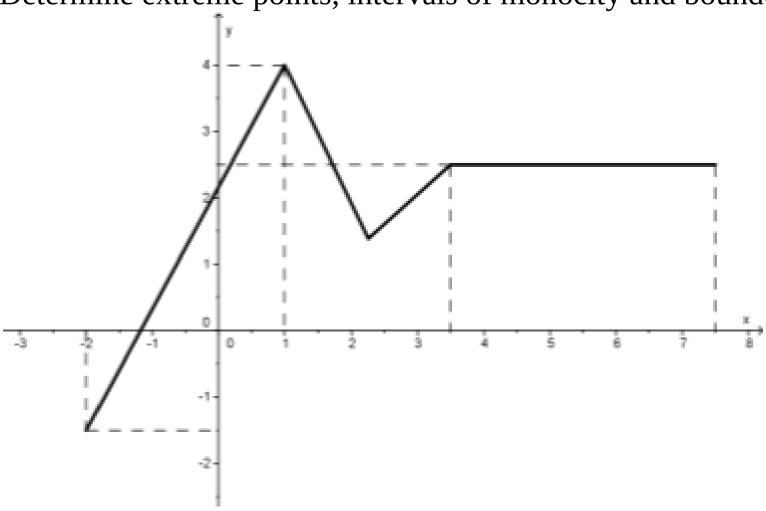



The function **is** periodic.




The function **is not** periodic.

**Practice:**
Determine extreme points, intervals of monocity and boundedness



The function is decreasing for x ∈

The function is incerasing for x ∈

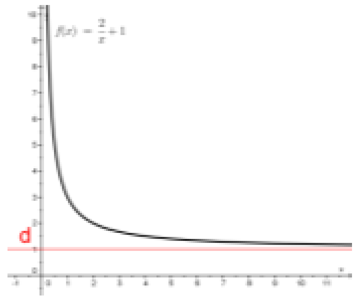
The function has maximum for x ∈ ; f(x) =

The function has minimum for x ∈ ; f(x) =

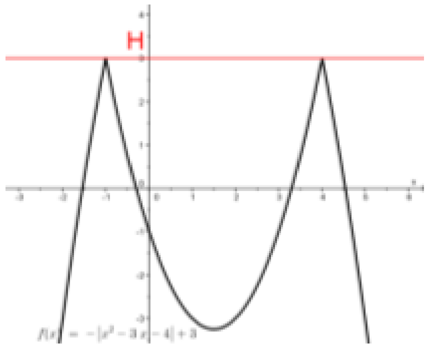
The function ……. bounded.
For all x ∈ $D_f$: $\leq f(x) \leq$

# VLASTNOSTI FUNKCE – omezenost, extrémy, periodičnost

## OMEZENÁ FUNKCE

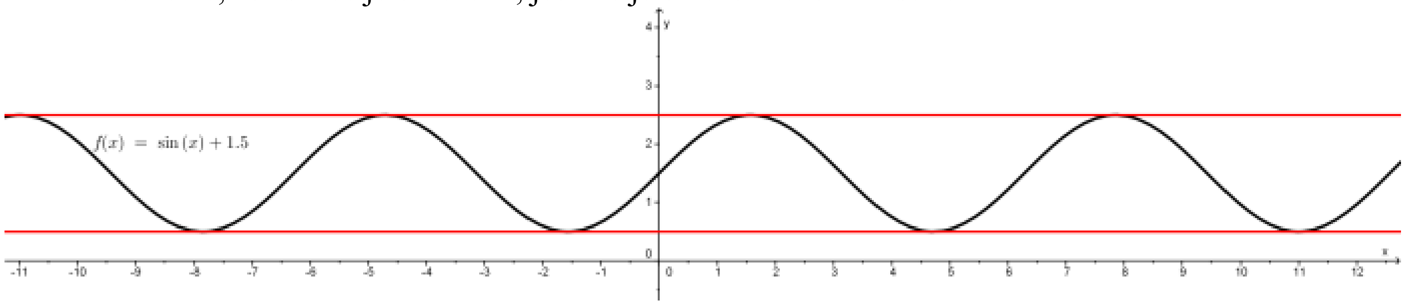



- Řekneme, že reálná funkce *f* je **omezená zdola**, jestliže existuje reálné číslo $d$ tak, že pro každé *x* z definičního oboru $D_f$ platí: $f(x) \geq d$.

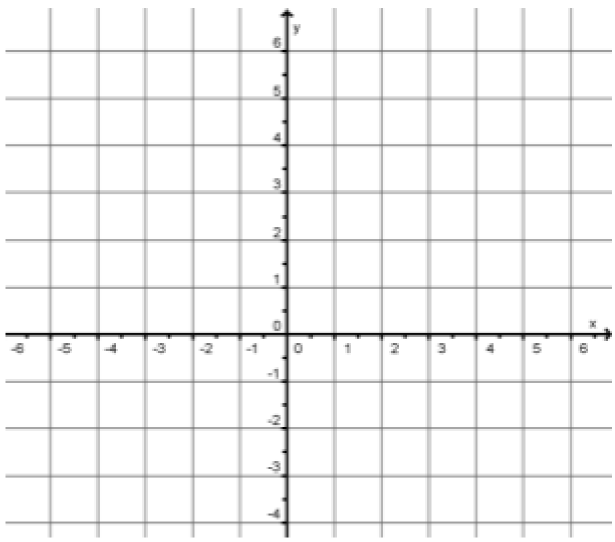



- Řekneme, že reálná funkce *f* je **omezená shora**, jestliže existuje reálné číslo H tak, že pro každé *x* z definičního oboru $D_f$ platí: $f(x) \leq d$.

- Řekneme, že funkce je **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.




**Cvičení:**
Načrtněte graf funkce, která je sudá a omezená zdola.



**Příklad:**
Zjistěte, zda je funkce $f: y = \frac{2}{x^2+1}$ omezená.

$$x^2 \geq 0$$
$$x^2 + 1 \geq 1$$
$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{1}$$
$$\frac{2}{x^2+1} \leq 2$$

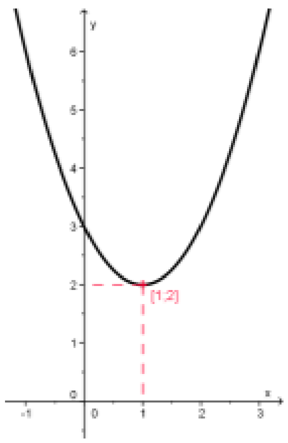
$$x^2 \geq 0$$
$$x^2 + 1 > 0;\ \ 2 > 0$$
$$\frac{2}{x^2+1} > 0$$

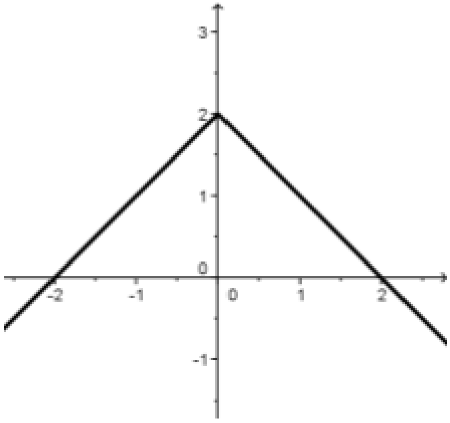
$$0 < \frac{2}{x^2+1} \leq 2$$
Funkce je omezená.

## Extrémy funkce

- V případě, že hodnota funkce je největší nebo nejmenší na celém jejím definičním oboru, pak se tato hodnota nazývá maximum respektive minimum funkce, jak je uvedeno níže.

**Funkce $f$ má maximum v bodě $a$, právě tehdy když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq f(a)$.**
**Funkce $f$ má minimum v bodě $b$ právě tehdy když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq f(b)$.**



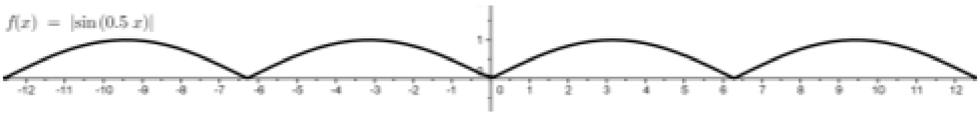



Funkce má minimum pro $x = 1$: $f(1) = 2$

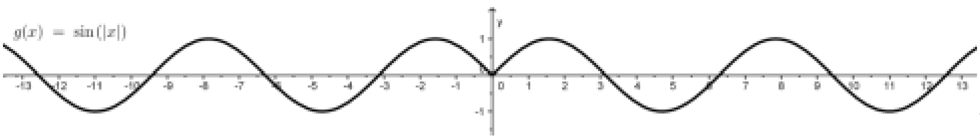
Funkce má maximum pro $x = 0$: $f(0) = 2$

## Periodická funkce

**Řekneme, že funkce $f$ je periodická s periodou $p$ ($p \in R^+$), jestliže pro všechna $x \in D_f$ také $(x + p) \in D_f$**
**A platí: $f(x) = f(x + np)$ pro $n = 1, 2, 3, ..$**

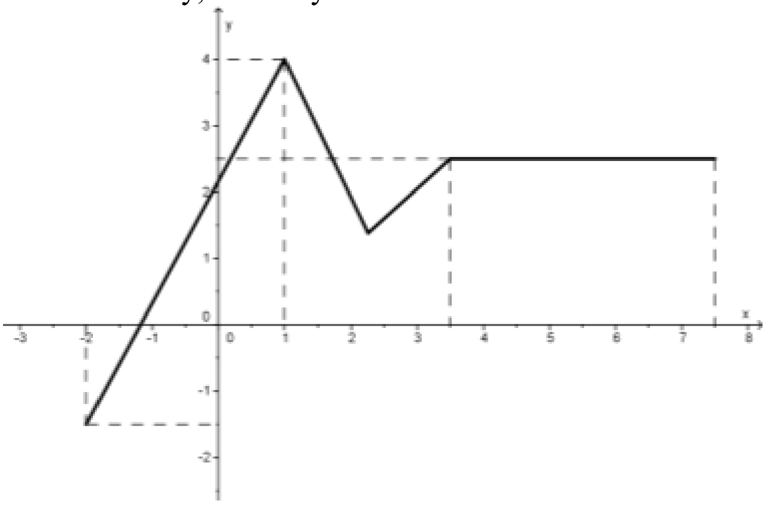



Funkce **je** periodická.




Funkce **není** periodická.

**Cvičení:**
Určete extrémy, intervaly monotónnosti a omezenost funkce.



Funkce je rostoucí pro pro x ∈

Funkce je klesající pro pro x ∈

Funkce má maximum pro x ∈ ; f(x) =

Funkce má minimum pro x ∈ ; f(x) =

Funkce ……. omezená.
Pro všechna x ∈ $D_f$: $\leq f(x) \leq$

# EVEN AND ODD FUNCTIONS

## EVEN FUNCTION

**A function $f$ is said to be even if:**

1. **For each $x \in D_f$ also $-x \in D_f$ and**
2. **For each $x \in D_f$: $f(x) = f(-x)$.**

- The graph of an even function is always symmetrical about the vertical axis (that is, we have a mirror image through the *y*-axis)

**Example 1:**

**1.**

***f:***

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***x*** | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| ***y*** | 9 | 6 | 3 | 1 | 3 | 6 | 9 |

Function *f* is even**.**

**2.**

***g:***

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***x*** | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| ***y*** | 9 | 6 | 3 | 1 | 3 | 5 | 9 |

Function $g$ is not even because $g(2) \neq g(-2)$.

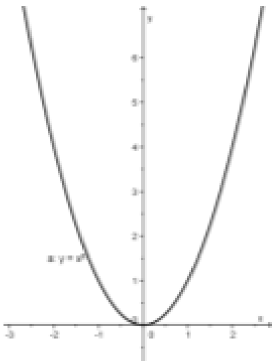
**3.**

***h:***

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***x*** | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| ***y*** | -5 | -4 | -3 | -3 | -4 | -5 | -6 |

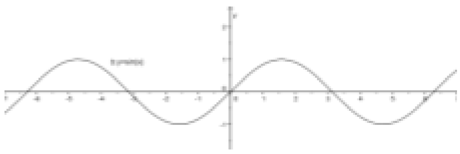
Function $h$ is not even because $4 \in D_h$ and $-4 \notin D_h$.

**2.**



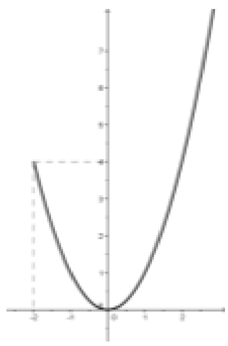
Function *a* is even.

**3.**



Function *b* is even.

**4.**



Function *c* is not even because $(-\infty; -2) \notin D_c$ and $(2; \infty) \in D_c$

**Example 2:** $f: y = x^4 + 3|x|$

$D_f = R$ this implies $-x \in D_f; x \in D_f$ .

$f(x) = x^4 + 3|x|$

$f(-x) = (-x)^4 + 3|-x| = x^4 + 3|x| = f(x)$

Function *f* is even.

**Practice 1:** Complete tables of even functions:

**1.**

***f:***

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***x*** | -5 | -4 | -3 | 0 | | | |
| ***y*** | 0 | 1 | 2 | 0 | | | |

**2.**

***g:***

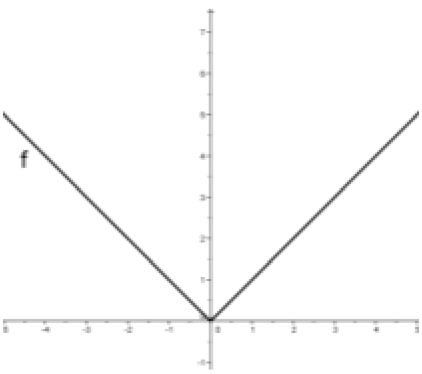
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***x*** | -9 | -2 | 5 | | | |
| ***y*** | | | | 1 | 2 | 6 |

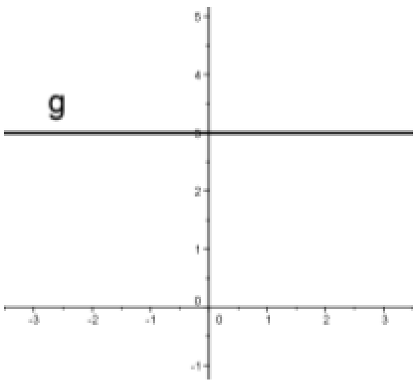
**3.**

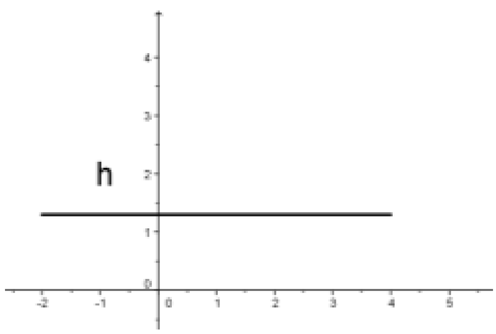
***h:***

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***x*** | 1 | 2 | 3 | | | | |
| ***y*** | 3 | 2 | 1 | | | | |

**Practice 2:** Decide which of these functions is even:



## ODD FUNCTION

**A function *f* is said to be odd if:**

1. **For each $x \in D_f$ also $-x \in D_f$ and**
2. **For each $x \in D_f$: ……………………….**

- The graph of an even function is always symmetrical about the origin.
  (a graph has origin symmetry if we can fold it along the vertical axis, then along the horizontal axis, and it lays the graph onto itself.)

**Example 1:**

**1.** ***f:***

| $x$ | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 6 | 3 | 1 | -3 | -6 | -9 |

Function *f* is odd**.**

**2.** ***g:***

| $x$ | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -9 | 6 | 3 | 0 | -3 | -5 | 9 |

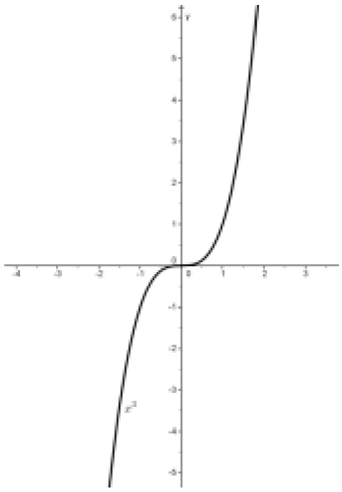
Function $g$ is not even because $-g(2) \neq g(-2)$.

**3.** ***h:***

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | -4 | -3 | -3 | 4 | -5 | -6 |

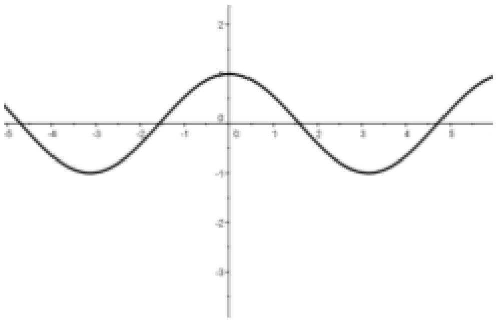
Function $h$ is not even because $4 \in D_h$ and $-4 \notin D_h$.

**2.**



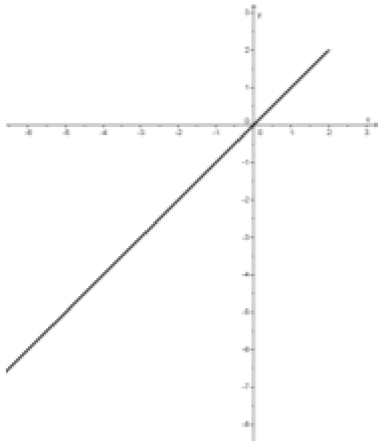
Function $a$ is odd.

**3.**



Function $b$ is even.

**4.**



Function $c$ is not even because $(-\infty;-2) \in D_c$ and $(2;\infty) \notin D_c$

**Example 2:** $f: y = x^3$

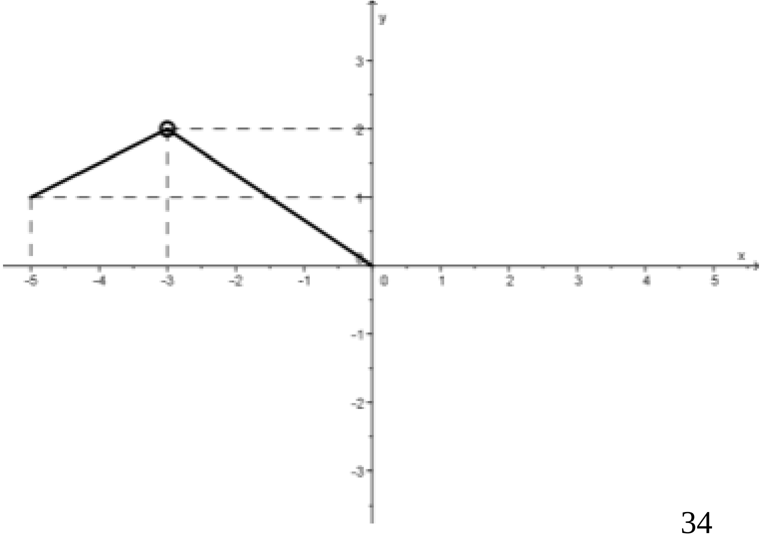
$D_f = R$ this implies $-x \in D_f; x \in D_f$ .

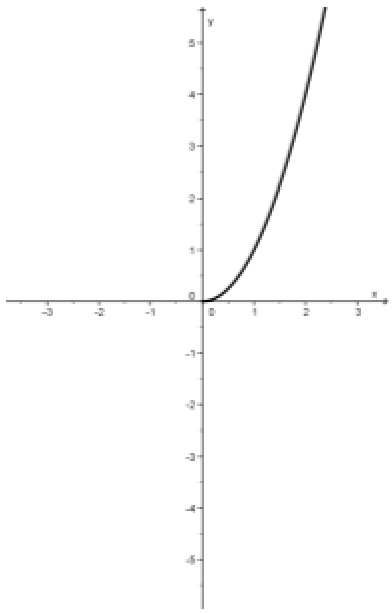
$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Function *f* is odd.

**Practice 1:** Complete the graph so that it is will be an odd function:





# PARITA FUNKCE

## SUDÁ FUNKCE

**Řekneme, že funkce je sudá, jestliže::**

3. **Pro všechna $x \in D_f$ i $-x \in D_f$ a**
4. **Pro všechna $x \in D_f$: $f(x) = f(-x)$.**

- Graf sudé funkce je souměrný podle osy *y*.
  (To znamená, že osa *y* vytváří zrcadlový obraz)

**Příklad 1:**

**1.**

***f:***

| ***x*** | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 9 | 6 | 3 | 1 | 3 | 6 | 9 |

Funkce *f* je sudá**.**

**2.**

***g:***

| ***x*** | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 9 | 6 | 3 | 1 | 3 | 5 | 9 |

Funkce $g$ není sudá, protože $g(2) \neq g(-2)$.

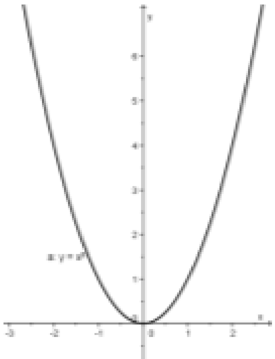
**3.**

***h:***

| ***x*** | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | -5 | -4 | -3 | -3 | -4 | -5 | -6 |

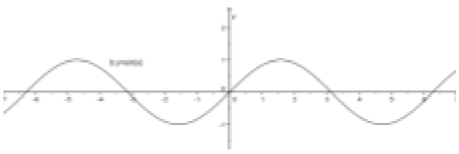
Funkce *h* není sudá, protože $4 \in D_h$ and $-4 \notin D_h$.

**2.**



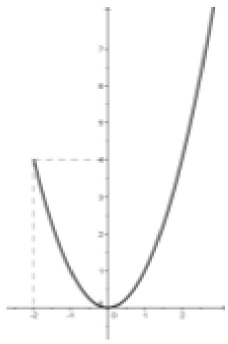
Funkce $a$ je sudá**..**

**3.**



Funkce $b$ je sudá**..**

**4.**



Funkce *c* není sudá, protože $(-\infty; -2) \notin D_c$ and $(2; \infty) \in D_c$

**Příklad 2:** $f: y = x^4 + 3|x|$

$D_f = R$ z toho vyplývá, že $-x \in D_f; x \in D_f$ .

$f(x) = x^4 + 3|x|$

$f(-x) = (-x)^4 + 3|-x| = x^4 + 3|x| = f(x)$

Funkce je sudá.

**Cvičení 1:** Doplňte tabulky sudých funkcí:

**1.**

***f:***

| ***x*** | -5 | -4 | -3 | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 0 | 1 | 2 | 0 | | | |

**2.**

***g:***

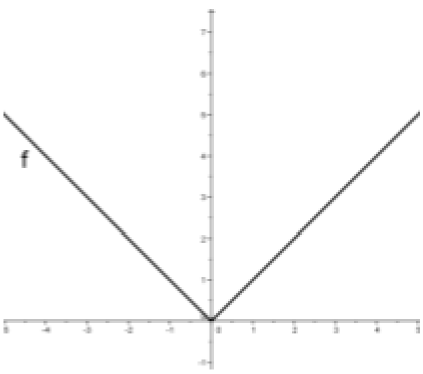
| ***x*** | -9 | -2 | 5 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | | | | 1 | 2 | 6 |

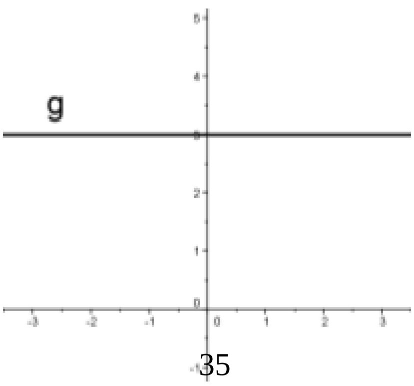
**3.**

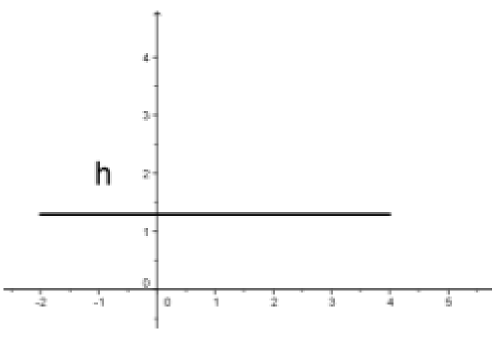
***h:***

| ***x*** | 1 | 2 | 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 3 | 2 | 1 | | | | |

**Cvičení 2:** Rozhodněte, které funkce jsou sudé:



## LICHÁ FUNKCE

**Řekneme, že funkce je lichá,jestliže::**

1. **Pro všechna $\boldsymbol{x \in D_f}$ i $\boldsymbol{-x \in D_f}$ and**
2. **Pro všechna $\boldsymbol{x \in D_f}$: ……………………….**

- Graf každé liché funkce je souměrný podle počátku soustav souřadnic.
  (Graf je středově souměrný. Pokud překlopíme graf podle osy y a tento obraz následně podle osy x, získáme totožný graf.)

**Příklad 1:**

**1.** ***f:***

| $x$ | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 6 | 3 | 1 | -3 | -6 | -9 |

Funkce *f* je lichá**.**

**2.** ***g:***

| $x$ | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -9 | 6 | 3 | 0 | -3 | -5 | 9 |

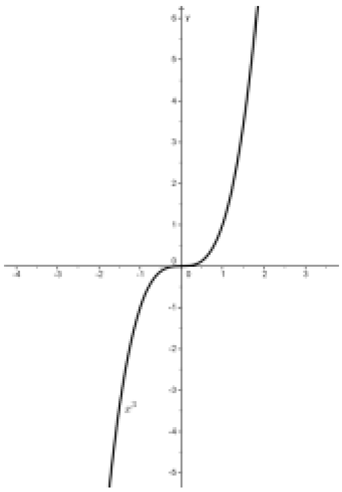
Funkce $g$ není lichá, protože $-g(2) \neq g(-2)$.

**3.** ***h:***

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | -4 | -3 | -3 | 4 | -5 | -6 |

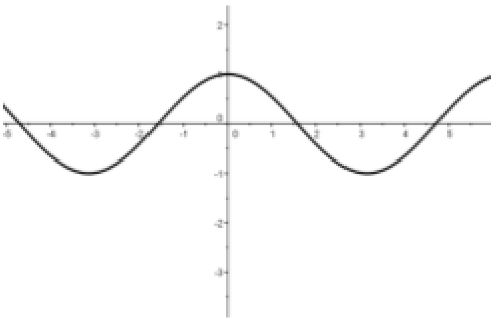
Funkce $h$ není lichá, protože $4 \in D_h$ and $-4 \notin D_h$.

**2.**



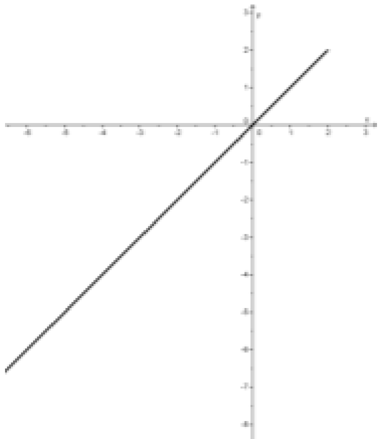
Funkce *a* je lichá**..**

**3.**



Funkce *b* je sudá**..**

**4.**



Funkce *c* není lichá, protože $(-\infty; -2) \in D_c$ and $(2; \infty) \notin D_c$

**Příklad 2:** $f: y = x^3$

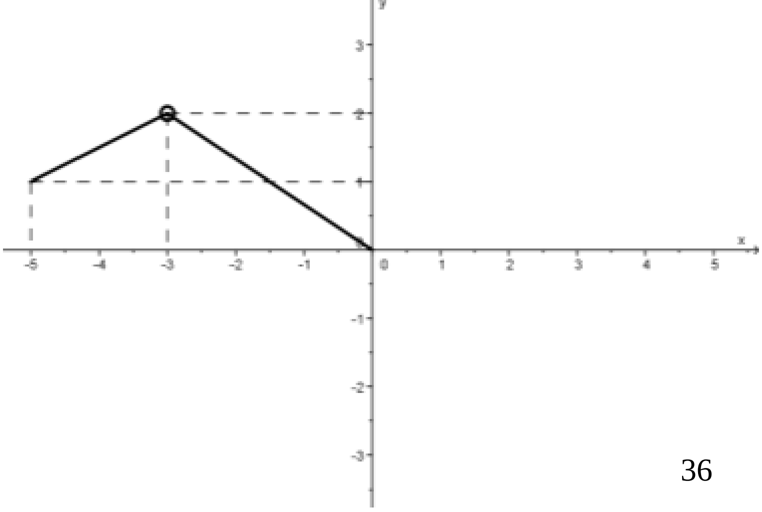
$D_f = R$ y toho vyplývá $-x \in D_f; x \in D_f$ .

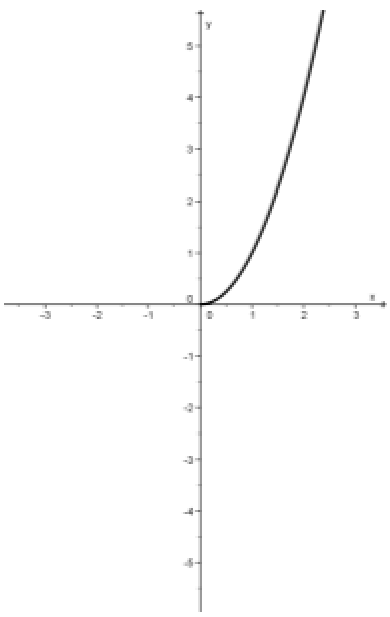
$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Funkce *f* je lichá..

**Cvičení 1:** Doplňte grafy tak, aby se jednalo o liché funkce.:





# WORKSHEET – PROPERTIES OF FUNCTIONS

**Fill in the gaps:**

## A.

**The function** of a single variable on set $A$ $(A \subset R)$ is a relation in which for ……………………….. is given ………………… of another set $B$ $(B \subset R)$.

The first variable is a function of the second variable if there is a relationship between them:

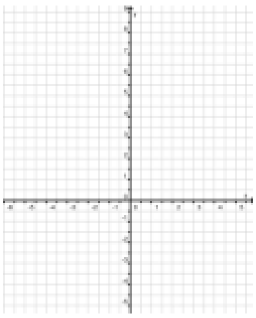
………………………………………………… ………….…………………………………… .

A variable, values which are given, is called an argument or an ……………………………………...

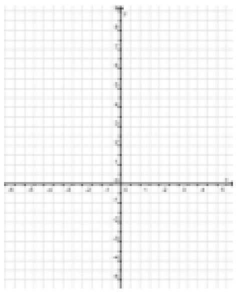
The other variable, values which are found by the certain rule, is called a …………………………….

Usually an argument is marked as …… and a …………………………. is marked as y .

**The domain** is the set ……………………………………………………………………………
**The range** is the set ……………………………………………………………………....



Graph of a function.

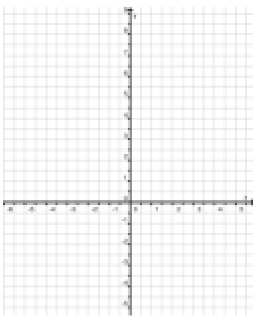


This graph is not a function.

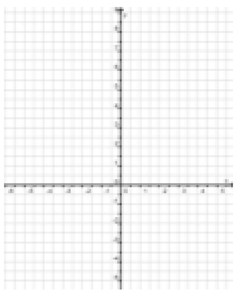
$D_f =$ $H_f =$

## B.

A function *f* is called **increasing** on an interval if ………………………………………………………..
A function *f* is called **decreasing** on an interval if ……………………………………………………….
A function *f* is called **nonincreasing** on an interval if ……………………………………………….....
A function *f* is called **nondecreasing** on an interval if.…………………………………………………….
A function is called **monotonic** if ………………………………………………………………….....



Graph of monotonic function.



Graph of nonincreasing function.

$D_f =$ $H_f =$ $D_f =$ $H_f =$

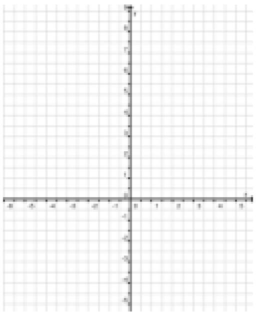
## C.

A function is called **one-to-one** if ………………………………………………………………………………......

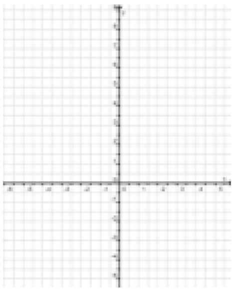
We say that a real function *f* is **bounded from below** if.…………………………………………………..

We say that a real function *f* is **bounded from above** if …………………………………………………

We say that a real function *f* is **bounded** if ……………………………………………………………..



Graph of bounded function.



Graph of a function which is not one-to-one..

$D_f =$ $H_f =$ $D_f =$ $H_f =$

A function *f* has **maximum** in point *a* if ………………………………………………………………….

A function *f* has **minimum** in point *b* if ……………………………………………………………………

A function is **periodic** with period *p* if …………………………………………………………………

## D.

A function *f* is said to be **even** if**:**

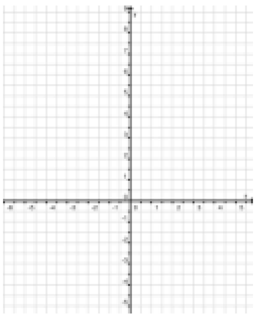
**1. …………………………….**

**2. ……………………………..**

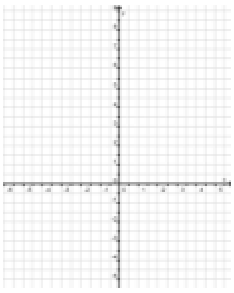
A function *f* is said to be **odd** if**:**

**1. …………………………….**

**2. ……………………………..**



Graph of odd function.



Graph of even function.

$D_f =$ $H_f =$ $D_f =$ $H_f =$

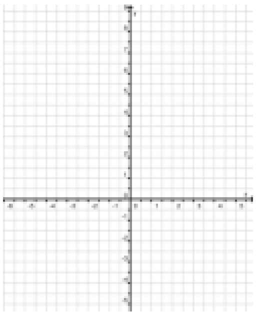
# PRACOVNÍ LIST – VLASTNOSTI FUNKCÍ

**Doplňte vynechaná místa:**

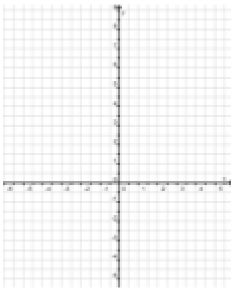
## A.

**Funkce** jedné proměnné na množině $A$ ($A \subset R$) je předpis, který ……………………………………přiřazuje ………………………………………………. $B$ ($B \subset R$).
První veličina (proměnná) je funkcí druhé veličiny (proměnné), jestliže mezi nimi existuje zobrazení, které …………………………………………………………………………………………………..
Proměnná, jejíž hodnoty jsou dány, se nazývá **argument** nebo ………………………………...
Druhá proměnná, jejíž hodnoty nalezneme pomocí konkrétního předpisu, se nazývá …………………..
Argument obvykle značíme … a závislou proměnnou …… .

**Definiční obor** je množina ……………………………………………………………………………
**Obor hodnot** je množina ……………………………………………………………………....



Graf funkce.

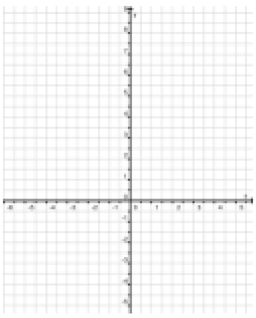


Tento graf není grafem funkce.

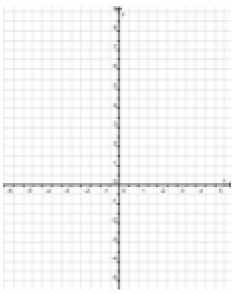
$D_f =$ $H_f =$

## B.

Funkce *f* je **rostoucí** na intervalu, jestliže ………………………………………………………..
Funkce *f* je **klesající** na intervalu, jestliže ……………………………………………………….
Funkce *f* je **nerostoucí** na intervalu, jestliže ……………………………………………….....
Funkce *f* je **neklesající** na intervalu, jestliže ……………………………………………………….
Funkce *f* je **monotónní**, jestliže ……………………………………………………………….....



Graf monotónní funkce.



Graf nerostoucí funkce.

$D_f =$ $H_f =$ $D_f =$ $H_f =$

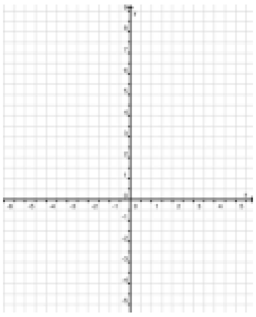
# C.

Funkce je **prostá**, jestliže …………………………………………………………………….....

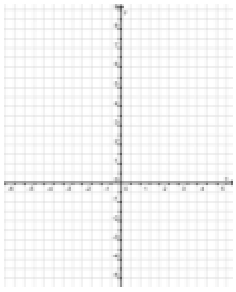
Řekneme, že funkce *f* je **omezená zdola**, jestliže …….…………………………………………..

Řekneme, že funkce *f* je **omezená shora**, jestliže ………………………………………………..…

Řekneme, že funkce *f* je **omezená**, jestliže …… ……………………………………….………..



Graf omezené funkce.



Graf prosté funkce.

$D_f =$ $H_f =$ $D_f =$ $H_f =$

Funkce *f* má v bodě *a* **maximum** ……………………………………………………………….

Funkce *f* má v bodě *b* **minimum** ………………………………………………………………….

Funkce je **periodická** s periodou *p*, jestliže………………………………………………………

# D.

Řekneme, že funkce *f* je **sudá**, jestliže**:**

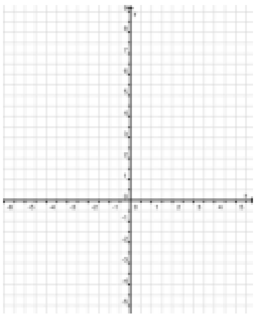
**1. …………………………….**

**2. ……………………………..**

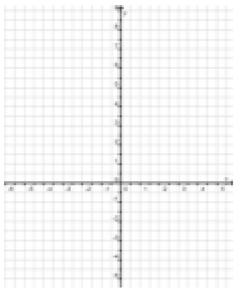
Řekneme, že funkce *f* je **lichá,** jestliže**:**

**1. …………………………….**

**2. ……………………………..**



Graf sudé funkce.

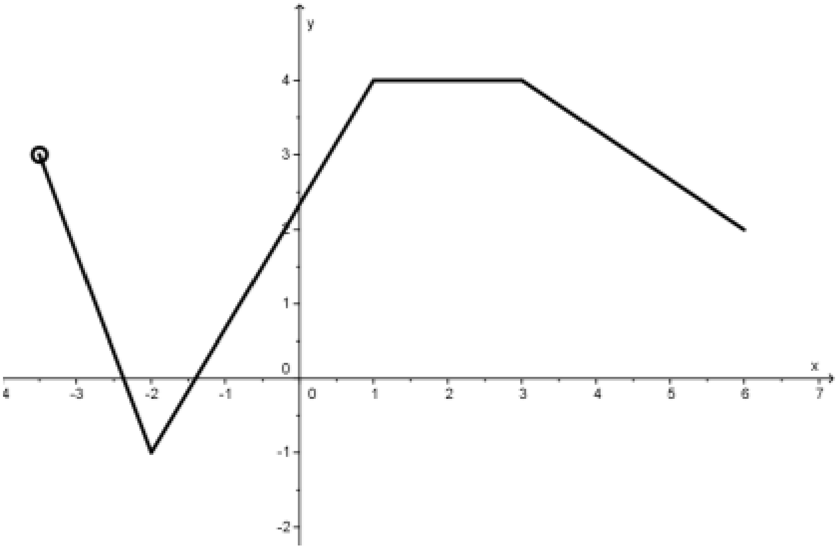


Graf liché funkce.

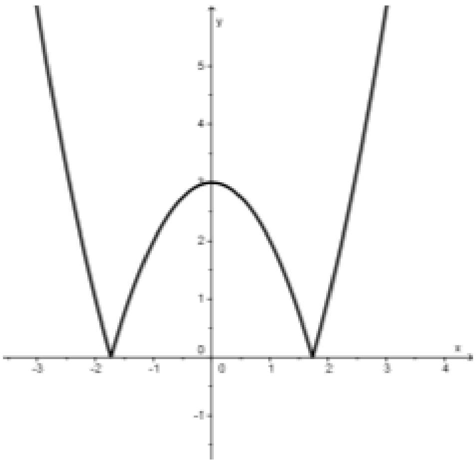
$D_f =$ $H_f =$ $D_f =$ $H_f =$

# WORKSHEET – properties of functions from graphs and tables

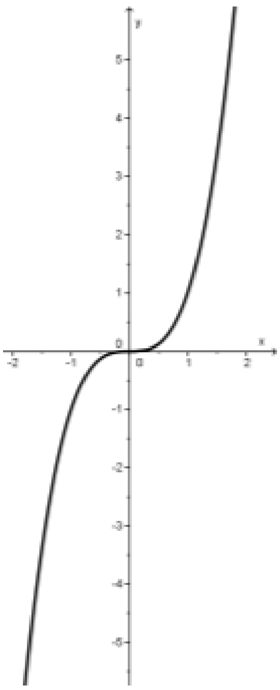
**Determine properties of following functions:**



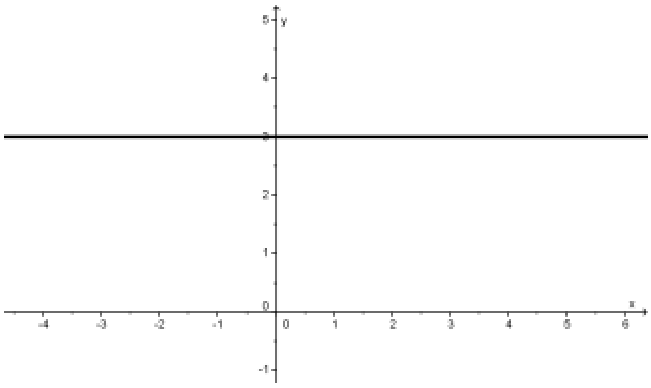
1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotonicity:
4. One-to-one:
5. Extremes:
6. Boundaries:
7. Odd, even:



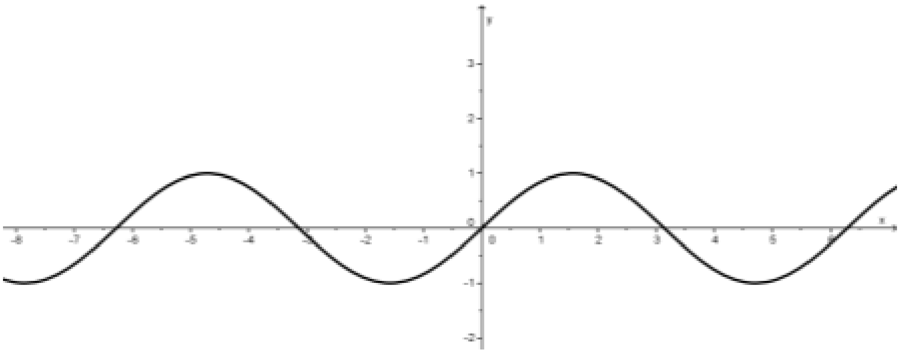
1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotonicity:
4. One-to-one:
5. Extremes:
6. Boundaries:
7. Odd, even:



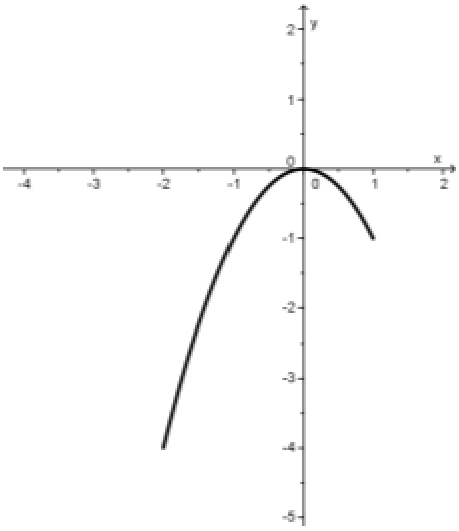
1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotonicity:
4. One-to-one:
5. Extremes:
6. Boundaries:
7. Odd, even:



1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotonicity:
4. One-to-one:
5. Extremes:
6. Boundaries:
7. Odd, even:



1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotonicity:
4. One-to-one:
5. Extremes
6. Boundaries:
7. Odd, even:



1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotonicity:
4. One-to-one:
5. Extremes:
6. Boundaries:
7. Odd, even:

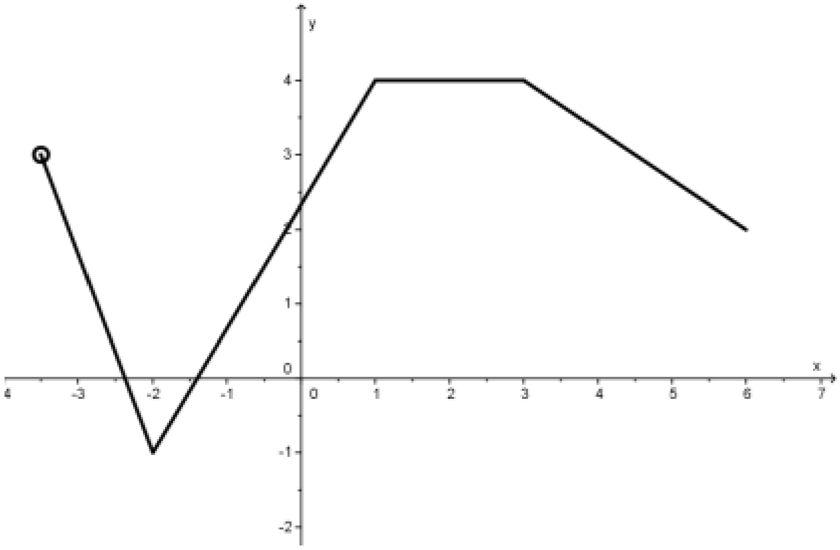
***f*:**

| $x$ | -5 | -2 | -3 | 3 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 2 | -2 | -1 | 0 |

1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotonicity:
4. One-to-one:
5. Extremes:
6. Boundaries:
7. Odd, even:

# PRACOVNÍ LIST – vlastnosti funkce z grafu a tabulky

**Určete vlastnosti následujících funkcí:**



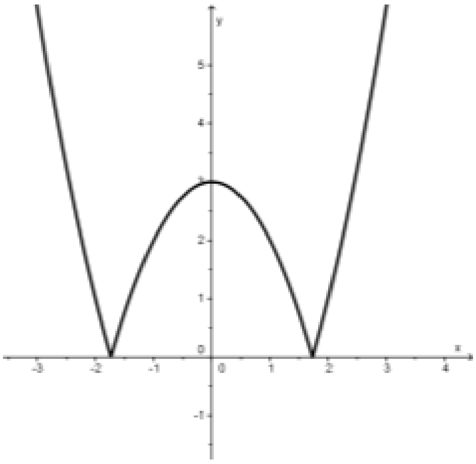
**1.** $D_f =$
**2.** $H_f =$
**3.** Monotónnost:

**4.** Prostá:

**5.** Extrémy:

**6.** Omezenost:

**7.** Parita:



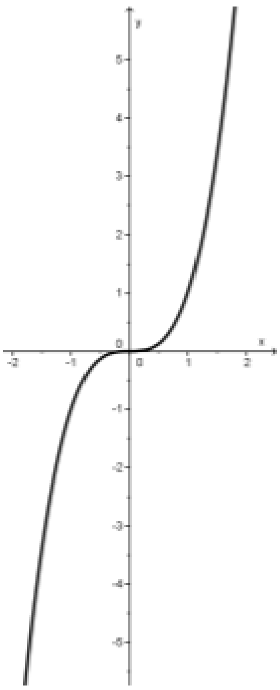
**1.** $D_f =$
**2.** $H_f =$
**3.** Monotónnost:

**4.** Prostá:

**5.** Extrémy:

**6.** Omezenost:

**7.** Parita:



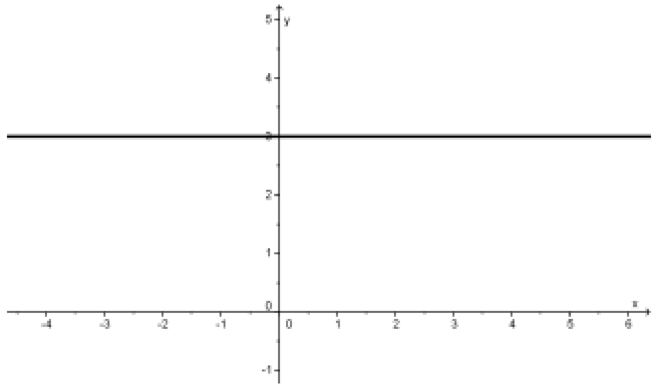
**1.** $D_f =$
**2.** $H_f =$
**3.** Monotónnost:

**4.** Prostá:

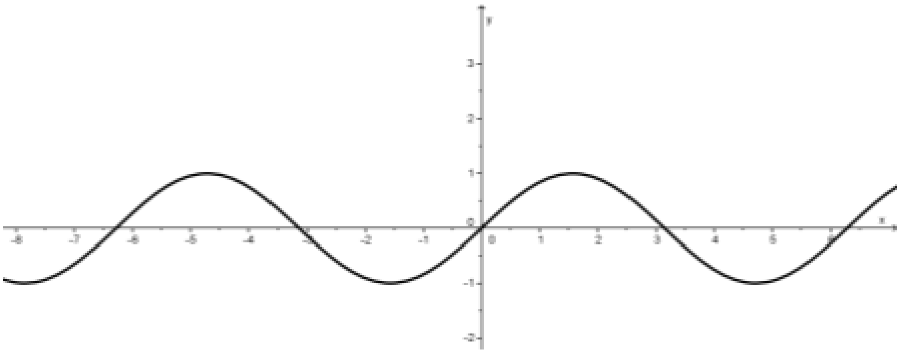
**5.** Extrémy:

**6.** Omezenost:

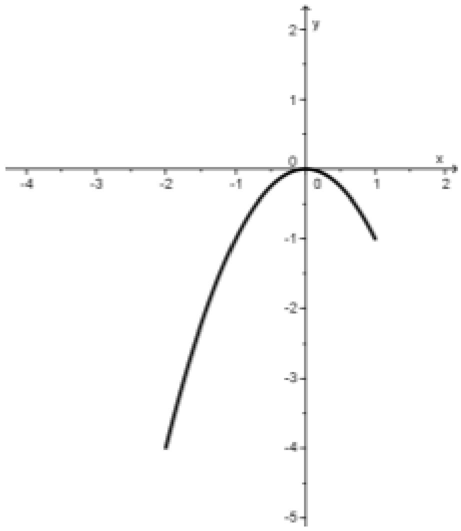
**7.** Parita:



1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotónnost:
4. Prostá:
5. Extrémy:
6. Omezenost:
7. Parita:



1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotónnost:
4. Prostá:
5. Extrémy
6. Omezenost:
7. Parita:



1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotónnost:
4. Prostá:
5. Extrémy:
6. Omezenost:
7. Parita:

***f:***

| $x$ | -5 | -2 | -3 | 3 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 2 | -2 | -1 | 0 |

1. $D_f =$
2. $H_f =$
3. Monotónnost:
4. Prostá:
5. Extrémy:
6. Omezenost:
7. Parita:

# LINEAR FUNCTION – word problem

**Example:**

Mr. Nováček gives his son a weekly pocket money in amount of 300 Kč. His son Peter spends on average 230 Kč per a week. From his grandmother he get an extra 500 Kč for a nice school report with straight ones.

**1.** Calculate how much money Peter gets from his dad per :

**a)** one week
**b)** 4 weeks
**c)** a year
**d)** 2 years
**e)** 100 years
**f)** t weeks

| **time t (weeks)** | **1** | **4** | **52** | | | **t** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **money x (Kč)** | | | | | | |

**2.** Calculate how much money Peter can save for :

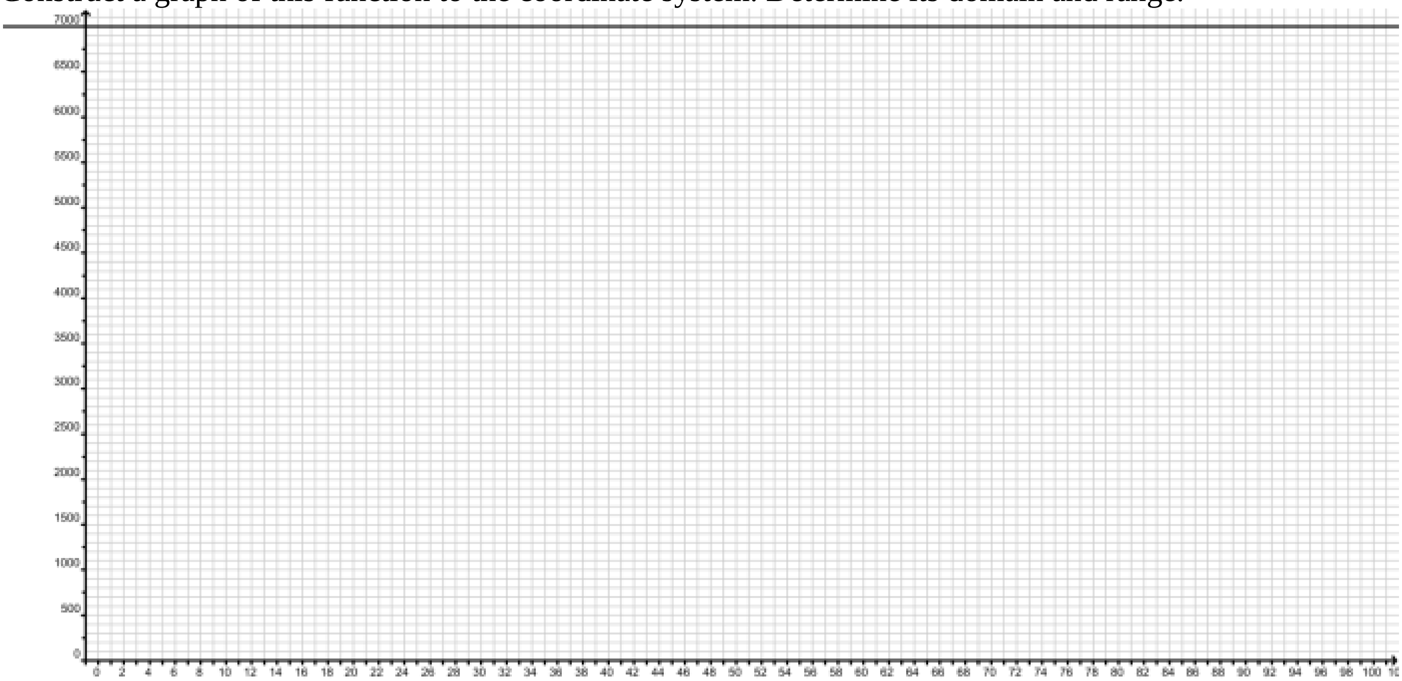
**a)** one week
**b)** 4 weeks
**c)** a year
**d)** 2 years
**e)** 100 years
**f)** t weeks

| **time t (weeks)** | **1** | **4** | **52** | | | **t** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **money x (Kč)** | | | | | | |

Write a function that expresses the dependence of the saved money on the number of weeks.

**a)** 1 week: $x = 500 + 1 \cdot 70$
**b)** 2 weeks: $x = 500 + \_\_ \cdot 70$
**c)** 4 weeks: $x =$
**d)** 52 weeks: $x =$
**e)** 104weeks: $x =$
**f)** **t weeks:** $\boldsymbol{x} =$

**3.** Construct a graph of this function to the coordinate system. Determine its domain and range.



$D_f =$ $H_f =$

**4.** How long will it take to Petr to save 7000 Kč for a new bike?

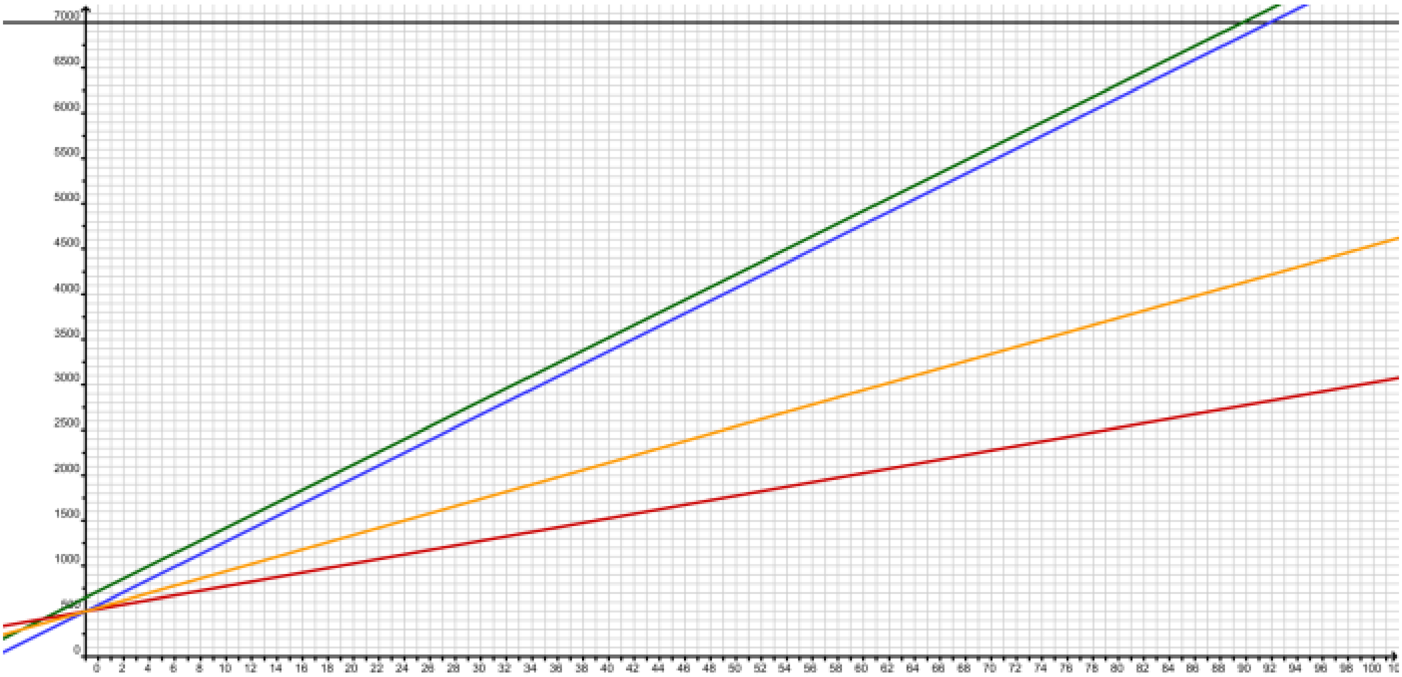
**Example 2:**
Write a function that expresses the dependence of the saved money on the number of weeks if

1. Petr got from his grandmother 500 Kč for a nice school report in addition to pocket money.
   $g: y =$
   $D_g =$ $H_g =$

2. Petr gets a weekly pocket money in amount of 250 Kč.
   $h: y =$
   $D_h =$ $H_h =$

3. Petr 's spending increased to 260 Kč.
   $k: y =$
   $D_k =$ $H_k =$

**Example 3:**
Assign functions *f, g, h, k* to the line, that is the graph of the function:



The …………………….. line (colour) is the graph of the function *f* with a formula *f*:y=
The …………………….. line (colour) is the graph of the function *g* with a formula *g*:y=
The …………………….. line (colour) is the graph of the function *h* with a formula *h*:y=
The …………………….. line (colour) is the graph of the function *k* with a formula *k:*y=

All functions that you have entered in this worksheet is an example of the linear function.

# LINEÁRNÍ FUNKCE – úvodní slovní úloha

**Příklad:**

Pan Nováček dává svému synovi týdenní kapesné ve výši 300 Kč. Jeho syn Petr týdně utratí v průměru 230 Kč. Za krásné vysvědčení se samými jedničkami dostal letos od babičky výjimečně ještě 500 Kč navíc.

**1.** Vypočítejte, kolik peněz dostal Petr od tatínka za:

**a)** týden
**b)** 4 týdny
**c)** rok
**d)** 2 roky
**e)** 100 let
**f)** t týdnů

| **čas t (týdny)** | **1** | **4** | **52** | | | **t** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **peníze x (Kč)** | | | | | | |

**2.** Určete, kolik peněz Petr ušetřil za:

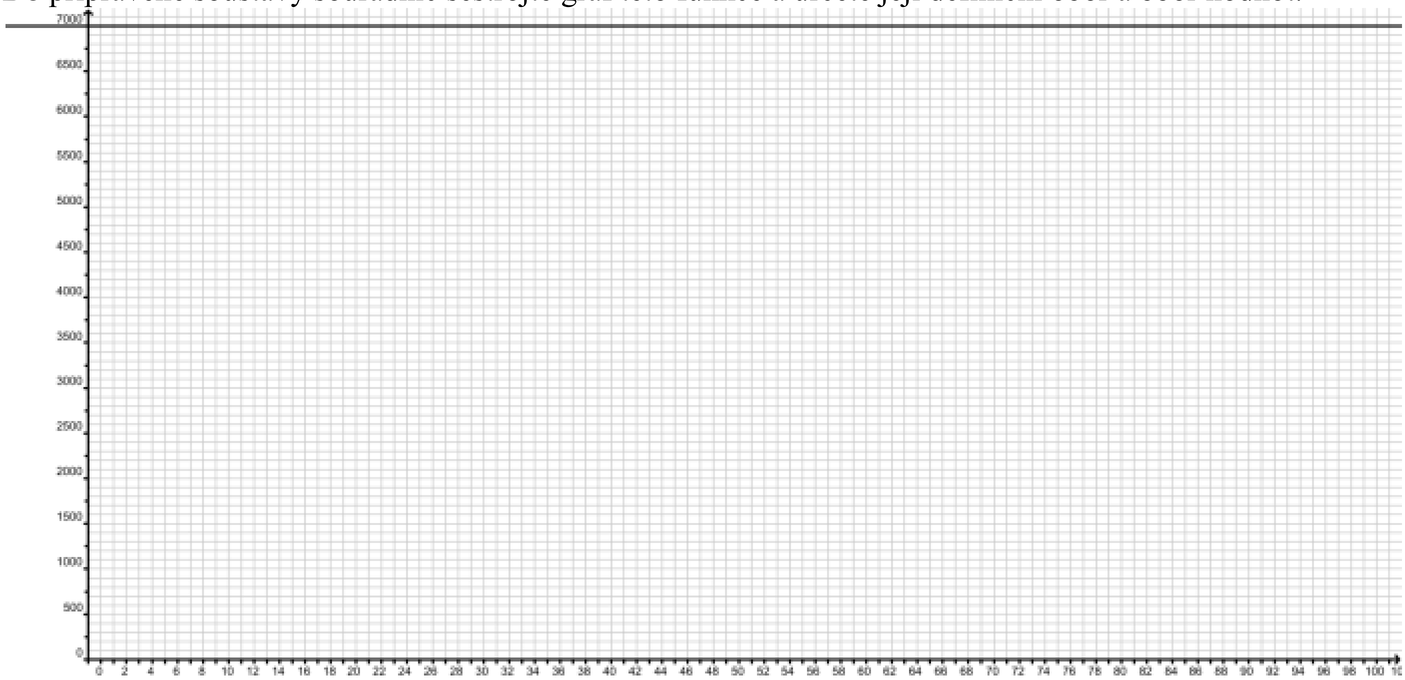
**a)** týden
**b)** 4 týdny
**c)** rok
**d)** 2 roky
**e)** 100 let
**f)** t týdnů

| **čas t (týdny)** | **1** | **4** | **52** | | | **t** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **peníze x (Kč)** | | | | | | |

Zapište předpis funkce *f*, která udává množství ušetřených peněz na čase uvedeném v týdnech.

1 týden: $x = 500 + 1 \cdot 70$
2 týdny: $x = 500 + \_\_ \cdot 70$
4 týdny: $x =$
52 týdnů: $x =$
104týdnů: $x =$
**t týdnů**: $x =$

**3.** Do připravené soustavy souřadnic sestrojte graf této funkce a určete její definiční obor a obor hodnot.




$D_f =$ $\qquad$ $H_f =$

**4.** Za jak dlouho by Petr při nezměněném kapesném ušetřil 7000 Kč na nové kolo?

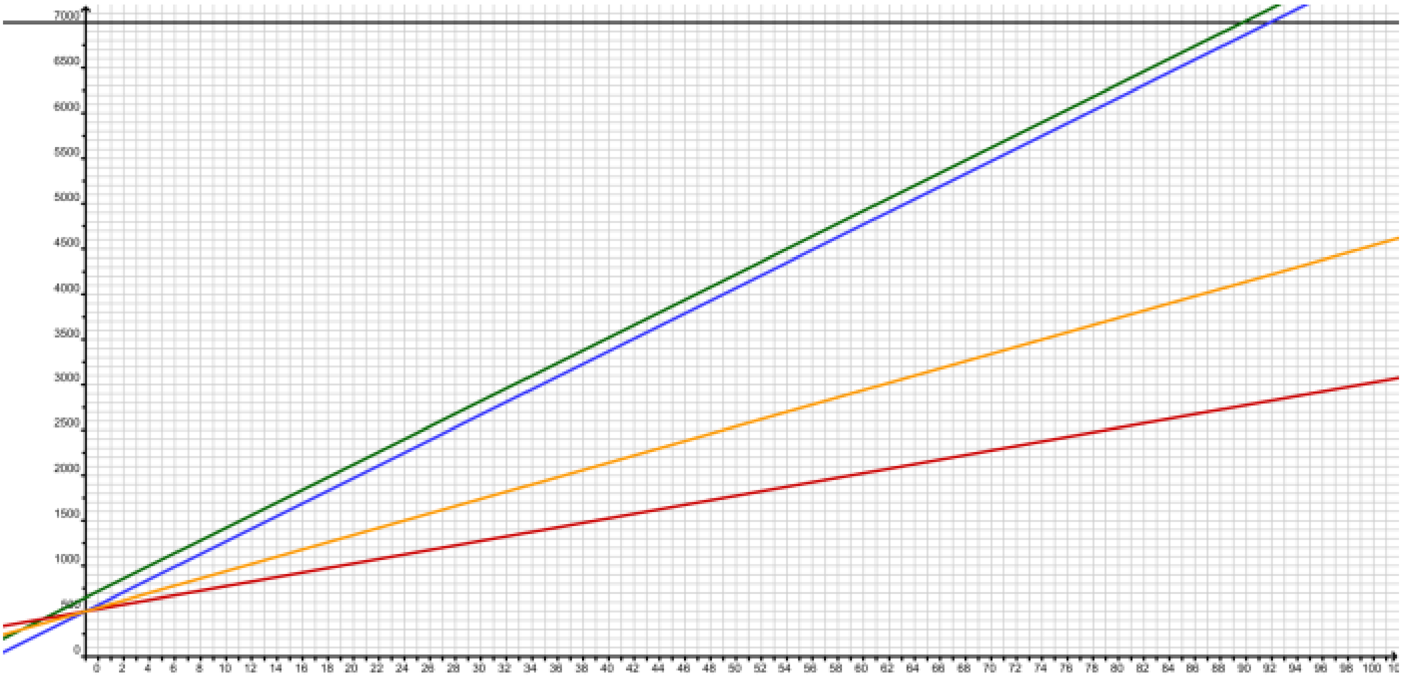
**Příklad 2:**
Zapište předpis funkce, která udává množství ušetřených peněz na čase uvedeném v týdnech, jestliže:

1. Petr dostal kromě kapesného od babičky odměnu za vysvědčení ve výši 650 Kč.
   $g: y =$
   $D_g =$ $H_g =$

2. Petr dostává kapesné ve výši 250 Kč.
   $h: y =$
   $D_h =$ $H_h =$

3. Petrova útrata vzrostla na 260 Kč.
   $k: y =$
   $D_k =$ $H_k =$

**Příklad 3:**
Přiřaďte funkcím *f, g, h, k* přímku, která je grafem příslušné funkce:



Grafem funkce *f* o předpisu *f*:y= je …………………….. přímka (přiřaďte barvu)
Grafem funkce *g* o předpisu *g*:y= je …………………….. přímka (přiřaďte barvu)
Grafem funkce *h* o předpisu *h*:y= je …………………….. přímka (přiřaďte barvu)
Grafem funkce *k* o předpisu *k*:y= je …………………….. přímka (přiřaďte barvu)

Všechny funkce, které jste sestavili v tomto pracovním listu, jsou příkladem lineární funkce.

# LINEAR FUNCTION – definition and graph

The name of a linear function comes from the latin word *linea*, which means ………………..
A graph of the linear function is thus ………..

**Linear function $f$ on set R is any function that has a formula:**

$\boxed{f\colon y = \qquad\qquad\qquad}$**,with** $a \in \quad , b \in$

Domain of the linear function: $D_f =$

A special case of the linear functions is:

1. **Constant function**
   - Linear function, in which $a = 0$, the constant function has a formula: $y =$
2. **Direct proportion**
   - Linear function, in which $b = 0$, the direct proportionality has a formula: $y =$

***Example:*** Linear functions include for example these:

$f_1\colon y = 3x + 2$ $\qquad$ $f_2\colon y = 2x$

$f_3\colon y = 2 - 5x$ $\qquad$ $f_4\colon y = 5$

## GRAPH OF THE LINEAR FUNCTION

- A line is the graph of the linear function.
- As the line is determined by exactly two points, it is sufficient to construct the graph of an linear function using the coordinates of two points.

**Example 1:** Construct a graph of a linear function with the formula:

$\boldsymbol{f\colon y = 3x + 5}$

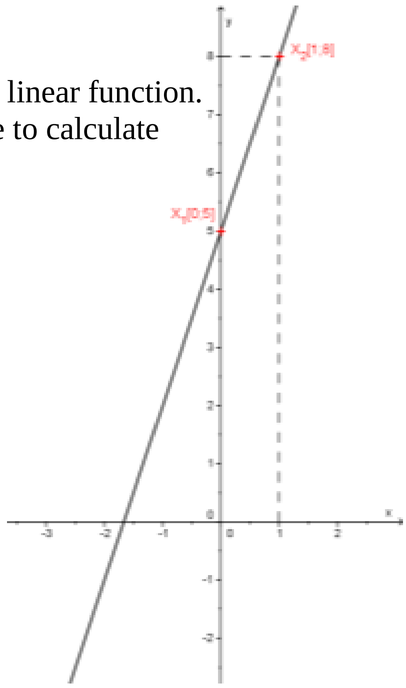
We need to know coordinates of two points to construct the graph of any linear function. The first coordinate we choose arbitrarily and the one remaining we have to calculate from the formula of our function.

$x_1 = 0\,,\ y_1 = f(x_1) = f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5;\ \ X_1[\,0;\ 5]$

$x_2 = 1\,,\ y_2 = f(x_2) = f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8;\ \ X_2[\,1;\ 8]$

A simple and clear notation can be also created in the table:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 8 |



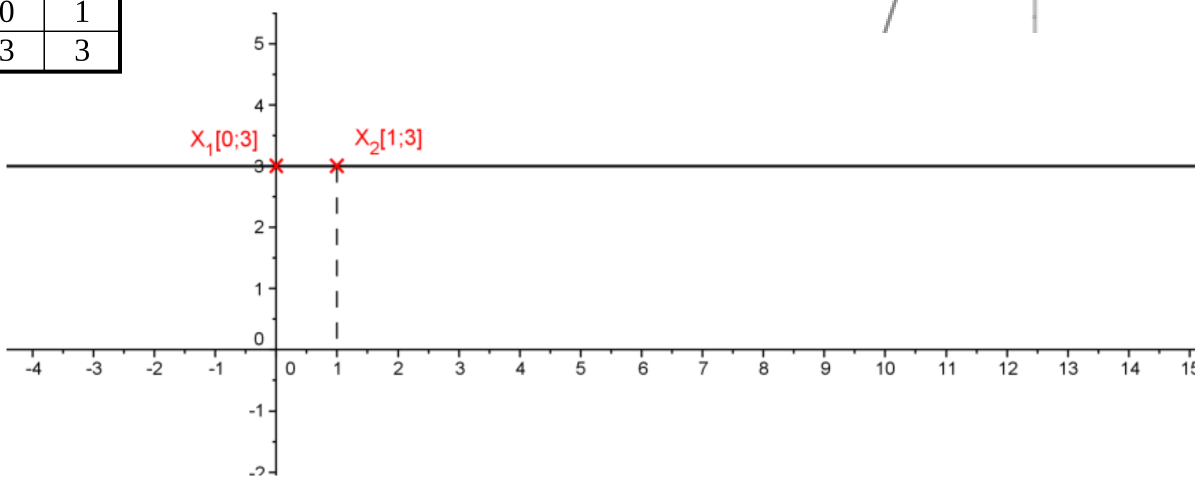
$f(x_1) = f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$

$f(x_2) = f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8$

**Example 2:** Construct a graph of a linear function with the formula:$\boldsymbol{f\colon y = 3}$

This formula is a formula of the constant function.

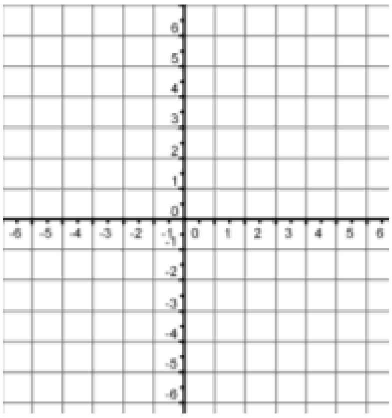
| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 3 |



**Practice 1:**Construct graphs of functions:

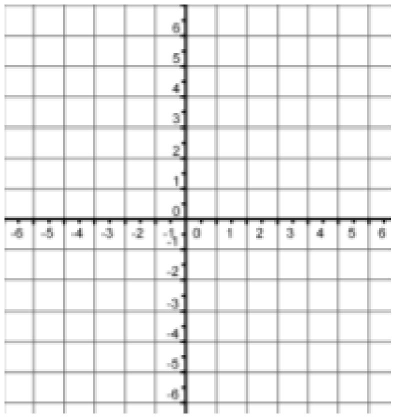
**1.** $y = 2x + 4$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |



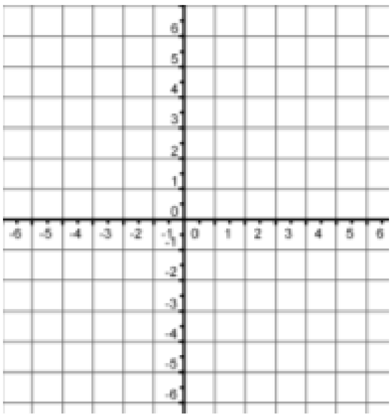
**2.** $y = 3x$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |



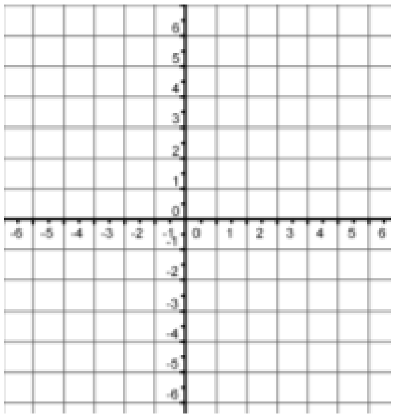
**3.** $y = -2x + 4$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |



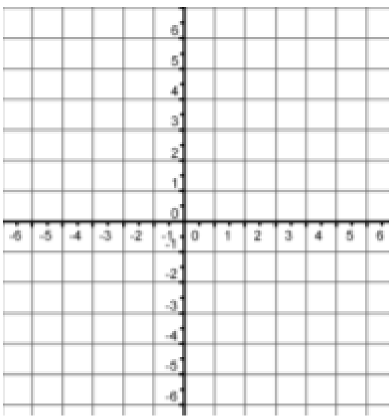
**4.** $y = 2$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |



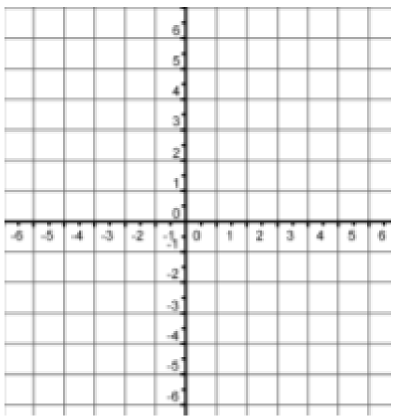
**5.** $y = 4x$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |



**6.** $y = 5$

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |



…………………………… is the graph of any linear function.

A line which passes through…………………………… is the graph of any direct proportion $y = ax; a\epsilon R$

A line which …………………………………………… is the graph of any constant function $y = b; b\epsilon R$

# LINEÁRNÍ FUNKCE – definice a graf

Název lineární funkce pochází z latinského slova *linea*, což znamená ………………..
Grafem lineární funkce je tedy ………..

**Lineární funkce $f$ na množině R je každá funkce, která má předpis ve tvaru:**

$\boxed{\boldsymbol{f: y =} \qquad\qquad\qquad}$ **,kde** $a \in \quad, b \in$

Definičním obor lineární funkce: $\boldsymbol{D_f} =$

Speciálním případem lineárních funkcí je:

3. **Konstantní funkce**
   - lineární funkce, kde je $a = 0$, konstantní funkce má předpis: $y =$
4. **Přímá úměrnost**
   - lineární funkce, kde je $b = 0$, přímá úměrnost má předpis: $y =$

Př.: Mezi lineární funkce patří například funkce:

$f_1: y = 3x + 2$ $\qquad$ $f_2: y = 2x$

$f_3: y = 2 - 5x$ $\qquad$ $f_4: y = 5$

## GRAF LINEÁRNÍ FUNKCE

- Grafem lineární funkce je přímka.
- Protože je přímka určena právě dvěma body, stačí k sestrojení grafu lineární funkce znát souřadnice dvou bodů.

**Příklad 1:** Sestrojte graf lineární funkce o předpisu: $\boldsymbol{f: y = 3x + 5}$

K sestrojení grafu lineární funkce stačí znát souřadnice dvou bodů.
První souřadnici zvolíme libovolně a zbylou musíme dopočítat z předpisu funkce.

$x_1 = 0\,,\ y_1 = f(x_1) = f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5;\ X_1[\,0;\ 5]$

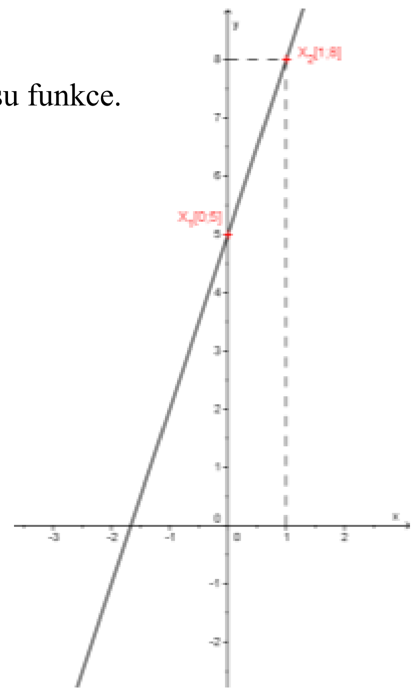
$x_2 = 1\,,\ y_2 = f(x_2) = f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8;\ X_2[\,1;\ 8]$

Jednoduchý a přehledný zápis můžeme vytvořit i pomocí tabulky:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 8 |

$f(x_1) = f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$

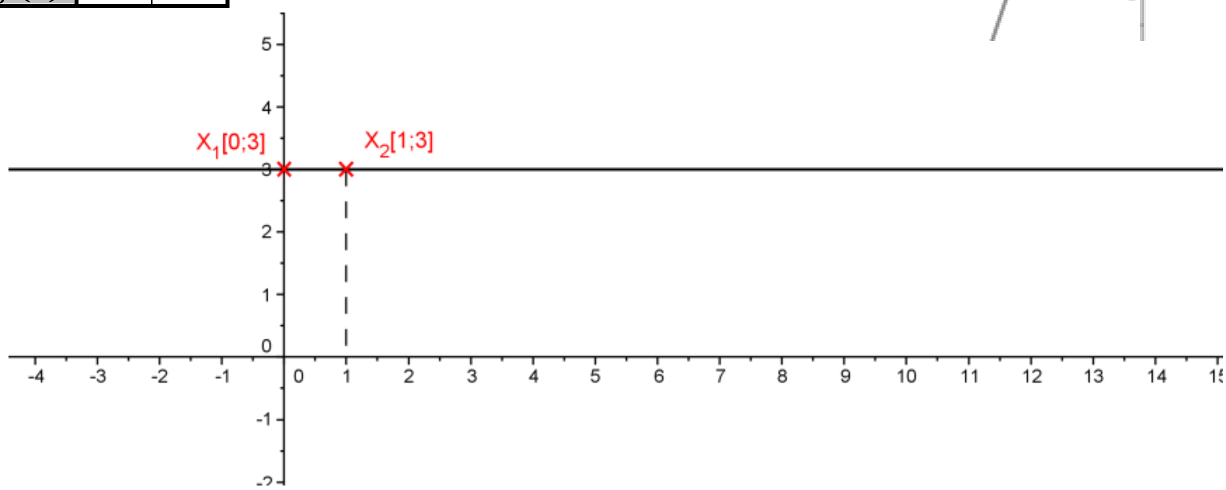
$f(x_2) = f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8$



**Příklad 2:** Sestrojte graf lineární funkce o předpisu: $\boldsymbol{f: y = 3}$

Jedná se o předpis konstantní funkce.

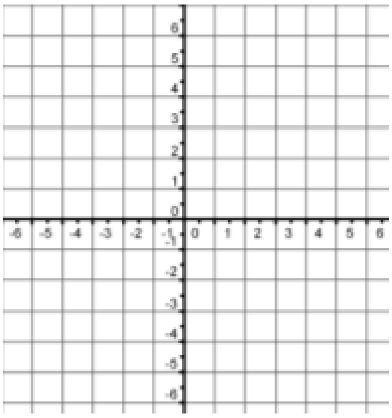
| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 3 |



**Cvičení 1:**Sestrojte grafy následujících funkcí:

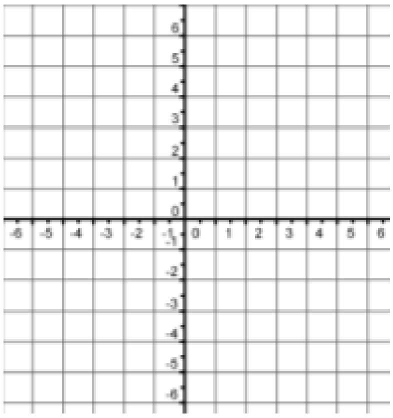
**1.** $y = 2x + 4$

| | | |
|---|---|---|
| | | |



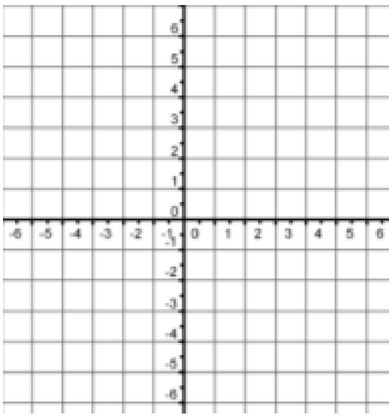
**2.** $y = 3x$

| | | |
|---|---|---|
| | | |



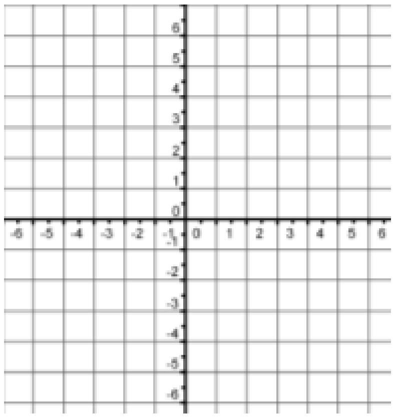
**3.** $y = -2x + 4$

| | | |
|---|---|---|
| | | |



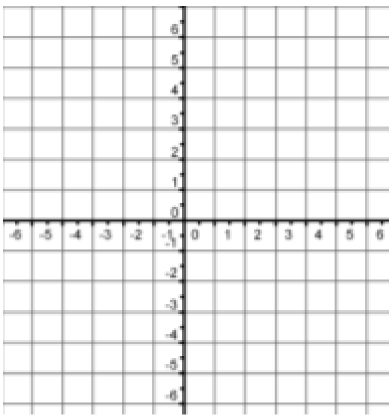
**4.** $y = 2$

| | | |
|---|---|---|
| | | |



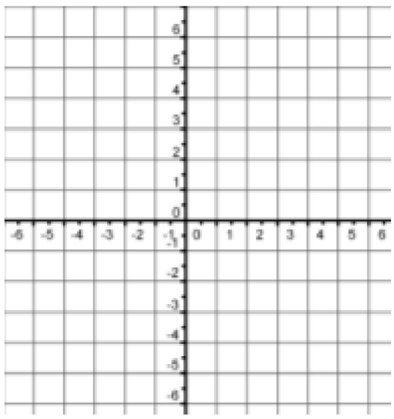
**5.** $y = 4x$

| | | |
|---|---|---|
| | | |



**6.** $y = 5$

| | | |
|---|---|---|
| | | |



Grafem každé lineární funkce je ……………………………

Grafem každé přímé úměrnosti $y = ax; a\epsilon R$ je přímka, která prochází ………………………………………

Grafem konstantní funkce $y = b; b\epsilon R$ je přímka, která …………………………………………………….

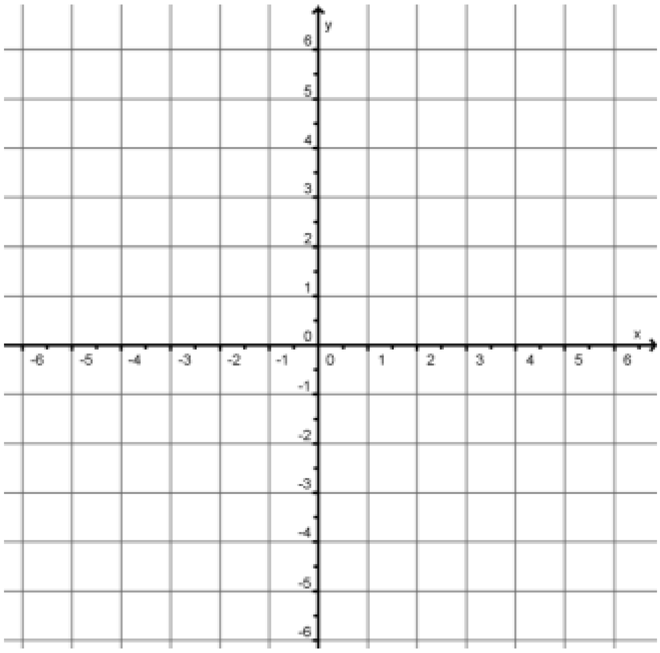
# LINEAR FUNCTION – importance of the parameters *a*, *b*

In this worksheet we will show the influence of the values of parameters $a$, $b$ in the formula of a linear function ($y = ax + b$) on its course and properties.

**Example 1.:** Construct graphs of functions into prepared coordinate system:

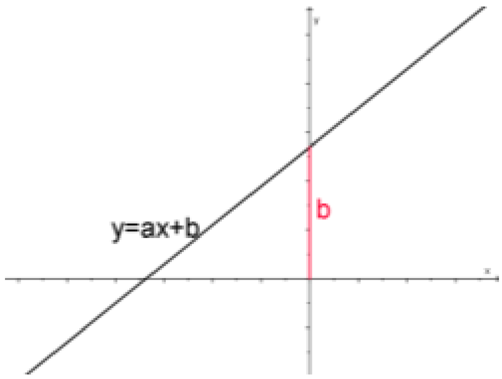
$$\boldsymbol{f: y = 2x}$$
$$\boldsymbol{g: y = 2x + 1}$$
$$\boldsymbol{h: y = 2x - 3}$$
$$\boldsymbol{j: y = 2x + \frac{3}{2}}$$

| $\boldsymbol{x}$ | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{f(x)}$ | | |
| $\boldsymbol{g(x)}$ | | |
| $\boldsymbol{h(x)}$ | | |
| $\boldsymbol{j(x)}$ | | |




The value of parameter $b$ in the formula of a linear function determines …………………………………………………

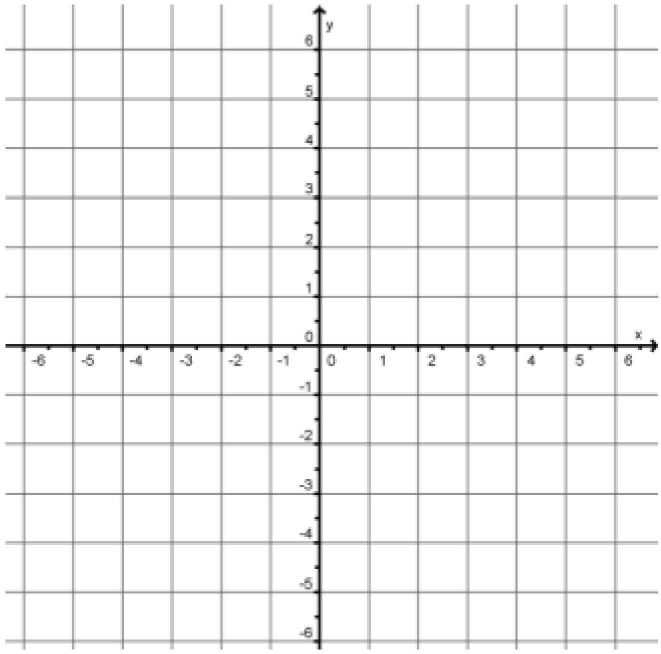
……………………………………………………...............




**Příklad 1:** Construct graphs of functions into prepared coordinate system:

$$\boldsymbol{f: y = 3x + 1}$$
$$\boldsymbol{g: y = x + 1}$$
$$\boldsymbol{h: y = -x + 1}$$
$$\boldsymbol{j: y = -2x + 1}$$

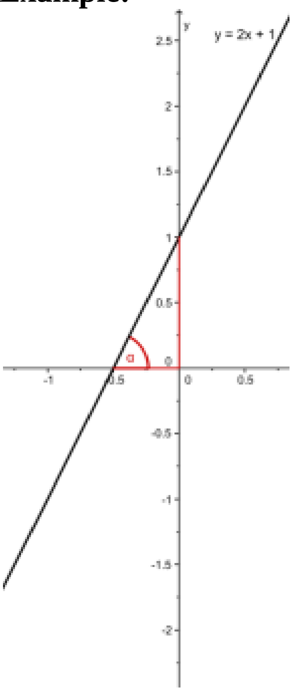
| $x$ | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | | |
| $g(x)$ | | |
| $h(x)$ | | |
| $j(x)$ | | |



The value of parameter *a* in the formula of a linear function determines ……………………………………..
…………………………………………………………………………………………………………..
This parameter is called **a slope of the line** and for all pairs $x_1 \neq x_2$ ; $x_1, x_2 \in D_f$ is given
$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \boldsymbol{tg\alpha}$.

**For $\boldsymbol{a}$….. is the graph of linear function increasing.**
**For $\boldsymbol{a}$….. is the graph of linear function decreasing.**
**For$\boldsymbol{a}$ …. is the linear function constant.**

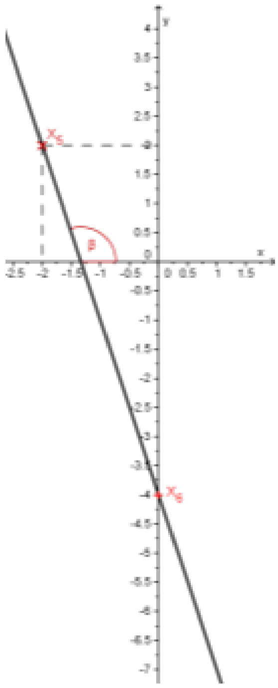
**Example:**




$\boldsymbol{y = 2x + 1}$

From the formula is determined:
$a = 2$

From the graph:
$$a = \frac{f(0) - f(-0,5)}{0 - (-0,5)} =$$
$$= \frac{1-0}{0,5} = 2$$

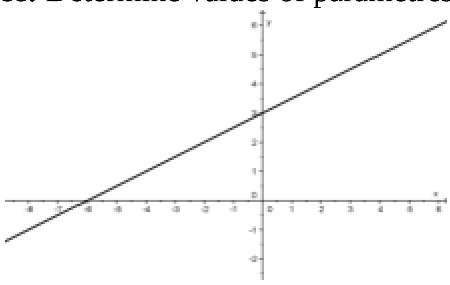


$\boldsymbol{y = -3x - 4}$

From the formula is determined:
$a = -3$

From the graph:
$$a = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} =$$
$$= \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{+2} = -3$$

**Practice:** Determine values of parametres *a*, *b* from the graph. Write the formula of this function.



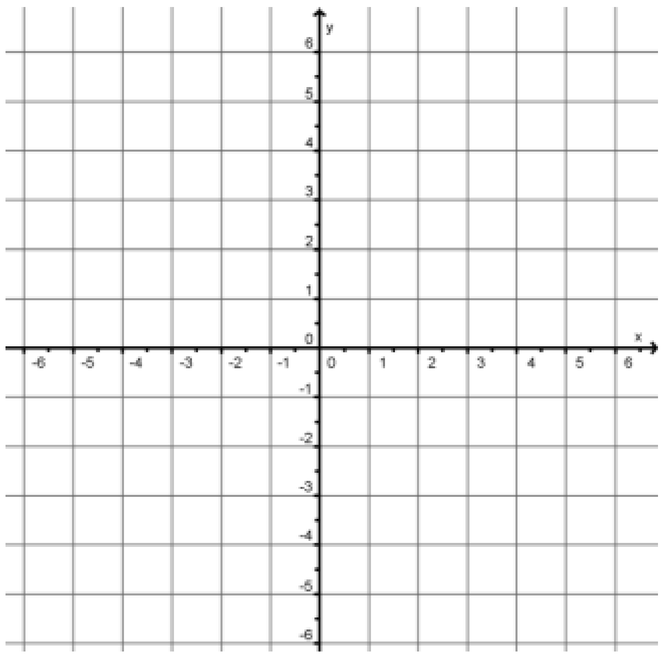
# LINEÁRNÍ FUNKCE– význam parametrů *a, b*

V tomto pracovním listu si ukážeme, jaký vliv mají hodnoty parametrů a, b v předpisu lineární funkce ($y = ax + b$) na její průběh a vlastnosti.

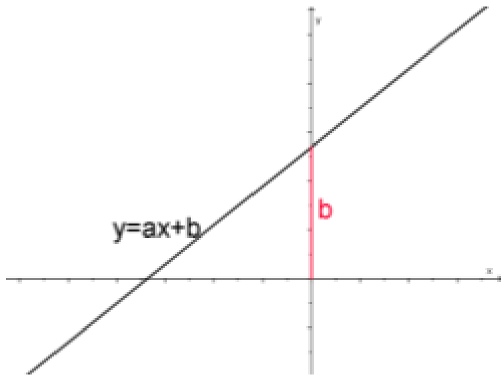
**Příklad 1.:** Do připravené soustavy souřadnic sestrojte grafy daných funkcí:

$\boldsymbol{f: y = 2x}$
$\boldsymbol{g: y = 2x + 1}$
$\boldsymbol{h: y = 2x - 3}$
$\boldsymbol{j: y = 2x + \frac{3}{2}}$

| $\boldsymbol{x}$ | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{f(x)}$ | | |
| $\boldsymbol{g(x)}$ | | |
| $\boldsymbol{h(x)}$ | | |
| $\boldsymbol{j(x)}$ | | |



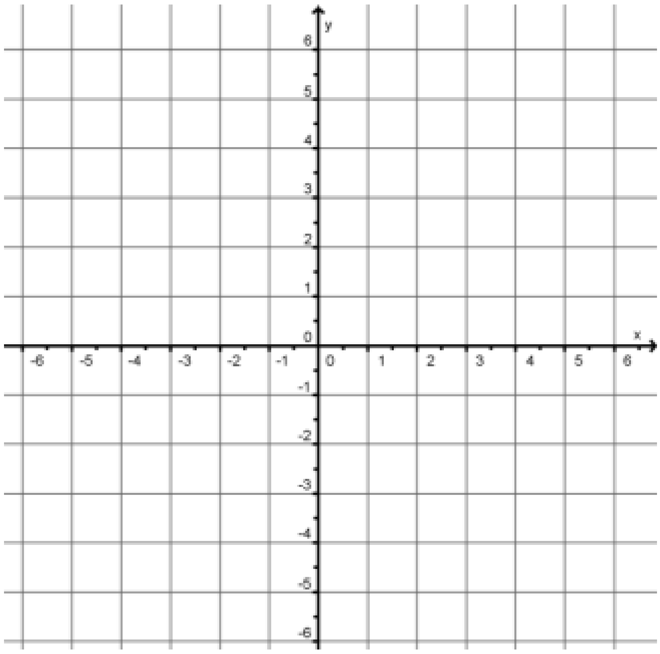

Hodnota parametru *b* v předpisu lineární funkce určuje ………………………………………………………
……………………………………………………....




**Příklad 1.:** Do připravené soustavy souřadnic sestrojte grafy daných funkcí:

$\boldsymbol{f: y = 3x + 1}$
$\boldsymbol{g: y = x + 1}$
$\boldsymbol{h: y = -x + 1}$
$\boldsymbol{j: y = -2x + 1}$

| $x$ | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | | |
| $g(x)$ | | |
| $h(x)$ | | |
| $j(x)$ | | |

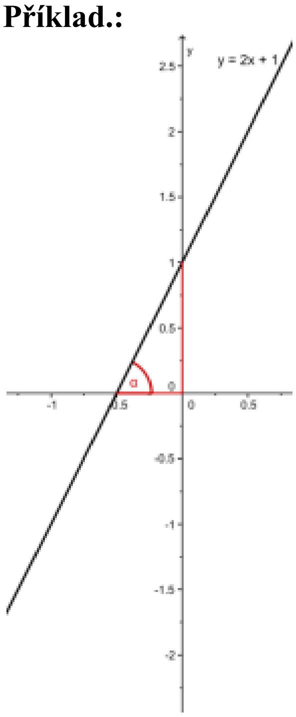


Hodnota parametru $a$ v předpisu lineární funkce určuje ………………………………………………………

Číslo $a$ se nazývá **směrnice přímky** a pro každou dvojici $x_1 \neq x_2$ ; $x_1, x_2 \in D_f$ platí $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \boldsymbol{tg\alpha}$.

**Pro $a$….. je lineární funkce rostoucí.**
**Pro $a$….. je lineární funkce klesající.**
**Pro $a$ …. se jedná o funkci konstantní.**

**Příklad.:**

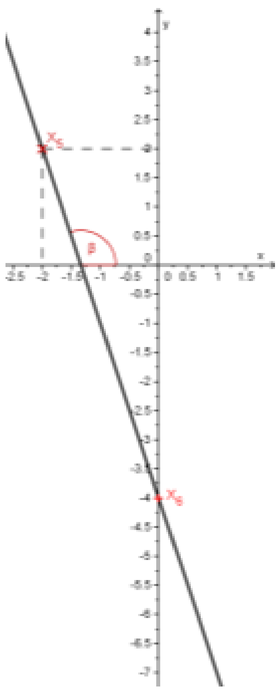



$\boldsymbol{y = 2x + 1}$

Z předpisu lze určit, že $a = 2$

Z grafu:

$$a = \frac{f(0) - f(-0{,}5)}{0 - (-0{,}5)} = \\ = \frac{1-0}{0{,}5} = 2$$



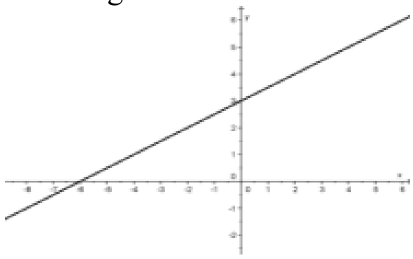
$\boldsymbol{y = -3x - 4}$

Z předpisu lze určit, že $a = -3$

Z grafu:

$$a = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \\ = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{+2} = -3$$

**Cvičení.:** Určete z grafu lineární funkce hodnoty parametrů $a$ a $b$. Sestavte předpis funkce.



# LINEAR FUNCTION– creating formula, properties

**Example 1:** ***For linear function g is given:*** $\boldsymbol{g(1) = 3, g(0) = 5}$**.** ***Create a formula of this function.***

The general formula of any linear function is: $\boldsymbol{y = ax + b}$, where $a \in R, b \in R$.
Each linear function has therefore different values of parameters *a* and *b*.
Contructing the formula of one specific function is based on determining the values of *a*, *b*.

We substitute values of the function from the input to the formula of the linear function.

$g(1) = 3, g(2) = 5$

$g: y = ax + b$

$g: g(x) = ax + b$

$3 = 1a + b$

$5 = 2a + b$

Now we solve the system of two linear equations with two unknowns.

$3 = 1a + b \ \ /\cdot(-1)$ +

$\underline{5 = 2a + b}$ $\qquad 5 = 2 \cdot 2 + b$

$\underline{2 = a}$ $\qquad \underline{b = 1}$

Zk.: $g(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$g: y = ax + b$

$\boldsymbol{g: y = 2x + 1}$

**Practice:** Determine the formulas of linear functions *f*, *g*, *h*, if you know:

**1.** $f(0) = 5; f(4) = 9;$ $\boldsymbol{f: y =}$

$5 \ = .. a + b$

$\underline{.... = 4a + b}$

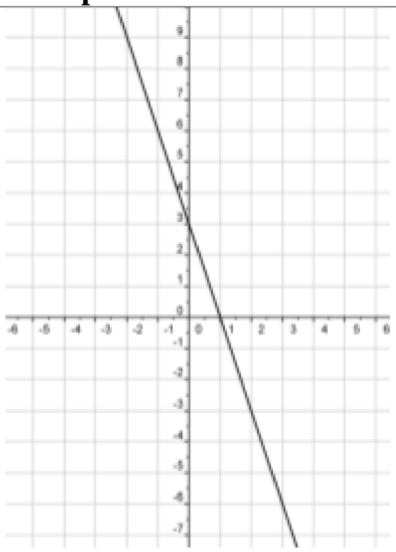
**2.** $g(-2) = 2; g(2) = -2;$ $\boldsymbol{g: y =}$

$... = .. a + b$

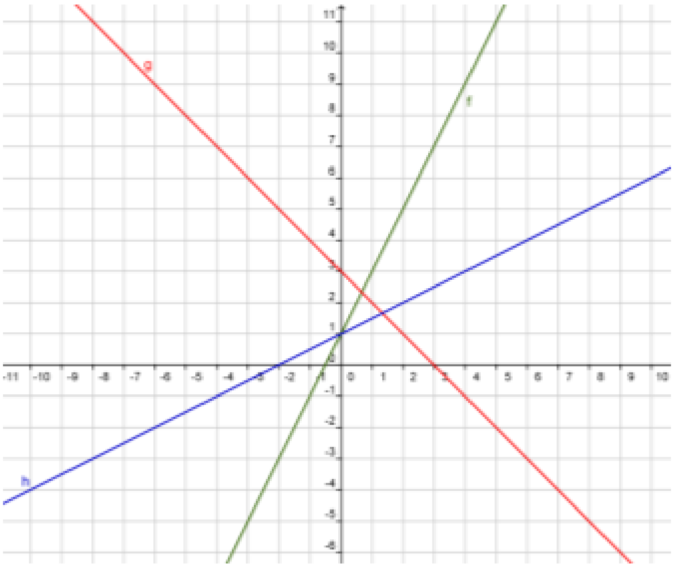
$\underline{... = .. a + b}$

**3.** $h(1) = 8; g(4) = 17;$ $\boldsymbol{h: y =}$

**Example 2: Determine the formula of linear function *f*, whose graph you can see on the picture.**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>1.possible solution<br>To construct the formula it is necessary to determine the coordinates of two points that lie on the graph (line) of the function.<br>$X_1[0; 3]$ , $X_2[1; 0]$<br>Now, the procedure is the same as in the previous case. We substitute coordinates of these points to the general rule of a linear function:<br>$f: f(x) = ax + b$<br>$... = ... a + b$<br>$\underline{... = ... a + b}$</td>
<td>2.possible solution<br>It is possible to directly determine the values of the parametres a, b.<br>$b =$<br>$a = —$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">$\boldsymbol{f: y =}$</td>
</tr>
</table>

**Practice:** ***Determine formulas of function f,g,h from the graph.***




$f: y =$ $g: y =$ $h: y =$

## PROPERTIES OF LINEAR FUNCTION

Fill in the gaps general properties of linear functions.

**Linear function *f* on set R is any function that has a formula:**

$\boxed{f: y = \quad\quad\quad}$ **,with** $a \in \quad , b \in$

| $a = 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| | | |
| $D_f =$ | $D_f =$ | $D_f =$ |
| $H_f =$ | $H_f =$ | $H_f =$ |
| **One-to-one** | **Simple** | **Simple** |
| Function .........one-to-one (is/ isn't) | Function .........one-to-one (is/ isn't) | Function .........one-to-one (is/ isn't) |
| **Monotonicity** | **Monotonicity** | **Monotonicity** |
| Function ...... ......for $x \in$ (increasing, decreasing, monotonicity) | Function ...... ......for $x \in$ (increasing, decreasing, monotonicity) | Function ...... ......for $x \in$ (increasing, decreasing, monotonicity) |
| **Bounded** | **Bounded** | **Bounded** |
| Function ...... bounded (is/ isn't) | Function ...... bounded (is/ isn't) | Function ...... bounded (is/ isn't) |
| **Extremum** | **Extremum** | **Extremum** |
| | | |
| **Even and odd** | **Even and odd** | **Even and odd** |
| | | |

# LINEÁRNÍ FUNKCE – sestavení předpisu, vlastnosti

**Příklad 1.:** ***Pro lineární funkci g platí:*** $\boldsymbol{g(1) = 3, g(0) = 5.}$ ***Určete předpis této funkce.***

Obecný předpis každé lineární funkce je ve tvaru: $\boldsymbol{y = ax + b}$, kde $a \in R, b \in R$.
Jednotlivé lineární funkce se tedy liší hodnotou parametrů *a* a *b*.
Sestavení předpisu konkrétní funkce tedy spočívá v určení hodnot *a*,*b*.
Do obecného předpisu lineární funkce dosadíme funkční hodnoty ze zadání.

$g(1) = 3, g(2) = 5$
$g: y = ax + b$
$g: g(x) = ax + b$
$\quad 3 = 1a + b$
$\quad 5 = 2a + b$

Nyní vyřešíme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$3 = 1a + b \;\; /\cdot(-1)$ +
$\underline{5 = 2a + b}$ $\qquad 5 = 2 \cdot 2 + b$
$\underline{2 = a}$ $\qquad \underline{b = 1}$

Zk.: $g(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$\quad g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$g: y = ax + b$
$\boldsymbol{g: y = 2x + 1}$

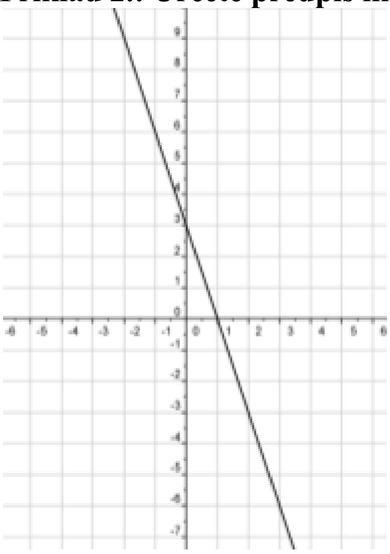
**Cvičení:** Určete předpisy lineárních funkcí *f*, *g*, *h*, víte-li:

**1.** $f(0) = 5; f(4) = 9;$ $\boldsymbol{f: y =}$
$\quad 5 \;=..a + b$
$\quad \underline{....= 4a + b}$

**2.** $g(-2) = 2; g(2) = -2;$ $\boldsymbol{g: y =}$
$\quad ... =..a + b$
$\quad \underline{... =..a + b}$

**3.** $h(1) = 8; g(4) = 17;$ $\boldsymbol{h: y =}$

**Příklad 2.: Určete předpis lineární funkce *f*, jejíž graf je na obrázku:**



**1.způsob**
K sestavení předpisu je třeba určit souřadnice dvou bodů, které leží na grafu (přímce) hledané funkce.

$X_1[0; 3]\,, X_2[1; 0]$
Nyní je postup stejný jako v předchozím případě. Souřadnice bodů dosadíme do becného předpisu lineární funkce:

$f: f(x) = ax + b$
$\quad ... =...a + b$
$\quad \underline{... =...a + b}$

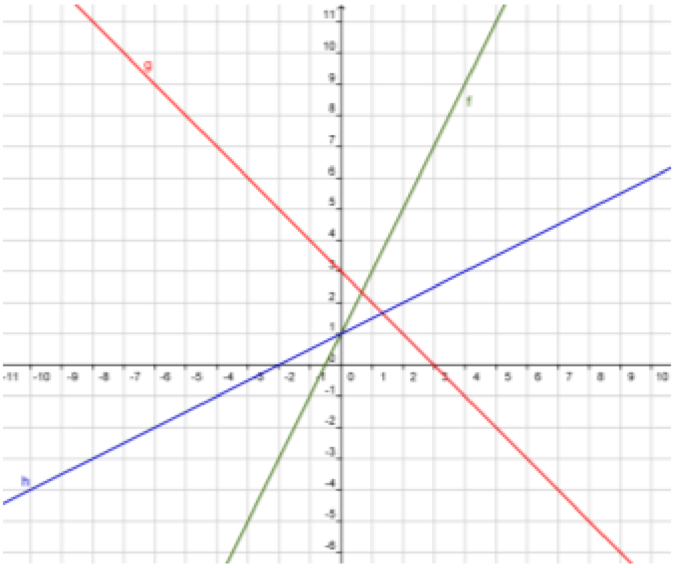
**2.způsob**
Z grafu je možné přímo určit hodnoty parametrů *a*, *b*.

$b =$

$a = \frac{}{}$

$\boldsymbol{f: y =}$ ____________

**Cvičení.:**Z grafů určete předpisy lineárních funkcí *f*,*g*,*h*:




$f: y =$ $g: y =$ $h: y =$

## VLASTNOSTI LINEÁRNÍ FUNKCE

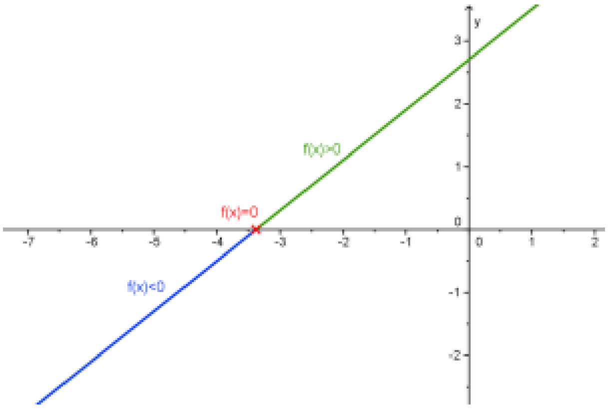
Doplňte na vynechaná místa obecné vlastnosti lineární funkce:

**Lineární funkce *f* na množině R je každá funkce, která má předpis ve tvaru:**

$\boxed{f: y = \quad\quad\quad\quad}$ **,kde** $a \in \quad , b \in$

| $a = 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| | | |
| $D_f =$ | $D_f =$ | $D_f =$ |
| $H_f =$ | $H_f =$ | $H_f =$ |
| **Prostá** | **Prostá** | **Prostá** |
| Funkce ………..prostá (je/není) | Funkce ………..prostá (je/není) | Funkce ………..prostá (je/není) |
| **Monotónnost** | **Monotónnost** | **Monotónnost** |
| Funkce …… ……pro $x \in$ (rostoucí, klesající, monotónní) | Funkce …… ……pro $x \in$ (rostoucí, klesající, monotónní) | Funkce …… ……pro $x \in$ (rostoucí, klesající, monotónní) |
| **Omezenost** | **Omezenost** | **Omezenost** |
| Funkce …… omezená (je/není) | Funkce …… omezená (je/není) | Funkce …… omezená (je/není) |
| **Extrémy** | **Extrémy** | **Extrémy** |
| | | |
| **Parita** | **Parita** | **Parita** |
| | | |

# LINEAR FUNCTION – use in solving equations, inequalities and their systems



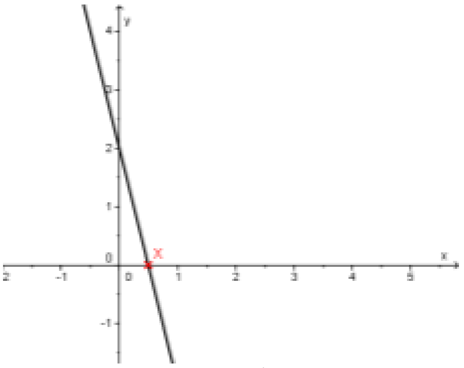

In this worksheet we will explain how to use the graphs of linear functions to solve linear equations, inequalities and their systems.

In the coordinate system on the left you can see a sample graph of a linear function.
The part of the graph, for which all the functional values are greater than zero, is green.
The part of the graph, for which all the functional values are less than zero, has blue colour.
The point, in which the value of the function is zero, is red.

**Example:**
Construct the graph of a linear function $f: y = -4x + 2$ and determine for which $x \in R$ is valid:

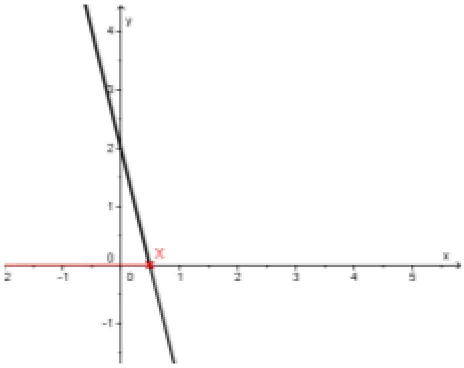
**1.** $-4x + 2 = 0$
**2.** $-4x + 2 > 0$
**3.** $-4x + 2 < 0$
**4.** $-4x + 2 \leq -2$
**5.** $-6 \leq -4x + 2 < 2$

**1.** $\boldsymbol{-4x + 2 = 0}$



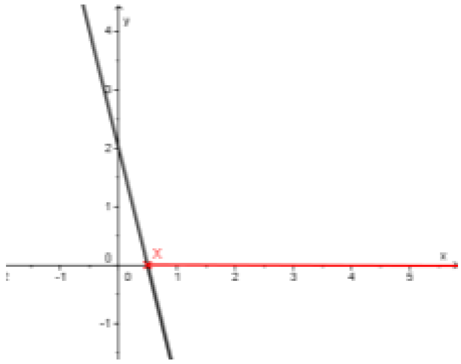
$x = \frac{1}{2}$

**2.** $\boldsymbol{-4x + 2} > 0$



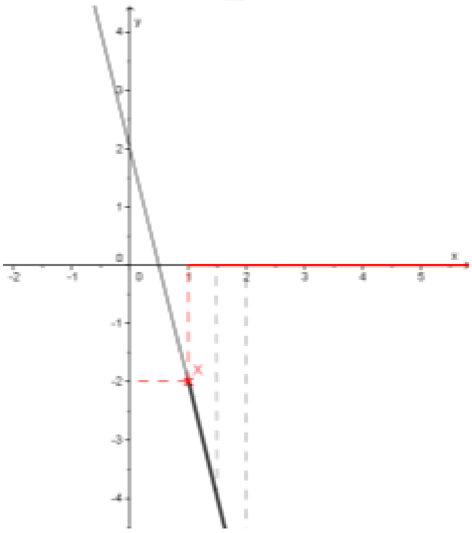
$x \in \left(-\infty; \quad \right)$

**3.** $\boldsymbol{-4x + 2} < 0$



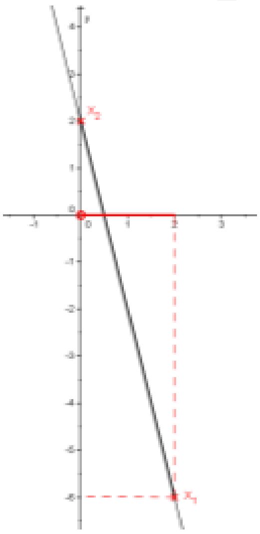
$x \in \left(\frac{1}{2}; \dots\right)$

**4.** $\boldsymbol{-4x + 2 \leq -2}$



$x \in$ ……………

**5.** $\boldsymbol{-6 \leq -4x + 2} < 2$



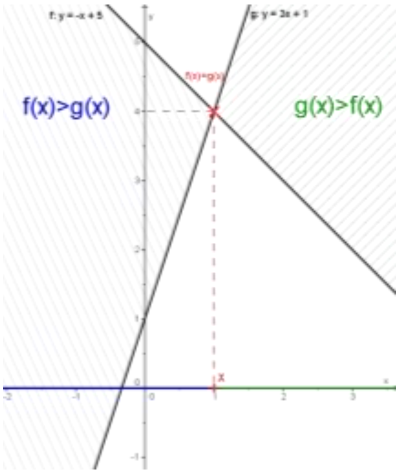

$x \in$ ……………

**Practice:** Construct the graph of a linear function $g: y = -2x + 1$ and determine from it for which $x \in R$ is valid:

**1.** $-2x + 1 \geq 0$
**2.** $-2x + 1 = 0$
**3.** $-2x + 1 < 0$
**4.** $-2x + 1 \geq -3$

**SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES BY GRAPHING**

In the coordinate system there are graphs of functions *f* and $g$.

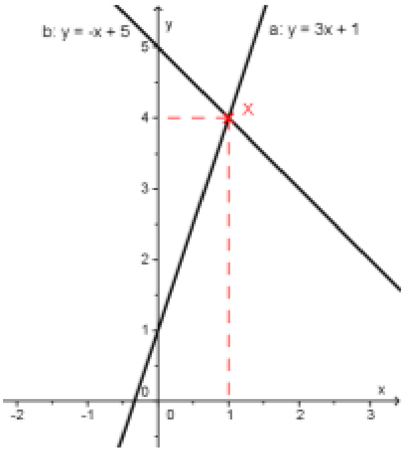



Function *f* is ..............(increasing/decreasing)

Function $g$ is..............(increasing/decreasing)

Functions *f* and $g$ intersect exactly in ...........(number) point/points.
This point is marked by................colour and in it is valid the equality: $f(x) = g(x)$.
From the graph we can also determine for which real numbers x, the value of the first function is greater than in the other (see the picture).
Simply we can say that the values of one function are greater than the functional value of the second function if its graph is above (above the graph of the second function).

**Příklad:** Solve this system of linear equations graphically:




$y = 3x + 1$

$\underline{y = -x + 5}$

The solution of this system is the ordered pair $[x; y]$ that is a solution to both equations.
To solve a system of linear equations graphically we graph both equations in the same coordinate system.
The solution to the system is the point where the two line intersect.

The solution of the example which is constructed in the coordinate system is a point:
$X[x; y] = [\quad ; \quad ]$.

**Practice:** Solve this equations graphically: $3x + 1 = -x + 5$ (use the graph above)
$X[x; y] = [\quad ; \quad ]$

**Practice:** Solve numerically an equation with unknowns $x, y \in R$:

$y = 3x + 1$

$y = -x + 5$

Solution:

$y = 3x + 1$

$\underline{y = -x + 5}$ -

$0 = \ldots -4$

$.. = 4x \ \ /(:4)$

$x = ..$

$y = -x + 5 = .. + 5 = \ldots$

$\boldsymbol{X}$[ ; ].

Graphical solution of linear equations is often used to solve problems of movement or other types of word problems.

## SOLVING LINEAR INEQUALITIES BY GRAPHING

**Example:** Solve inequalities graphically (use the graph above):

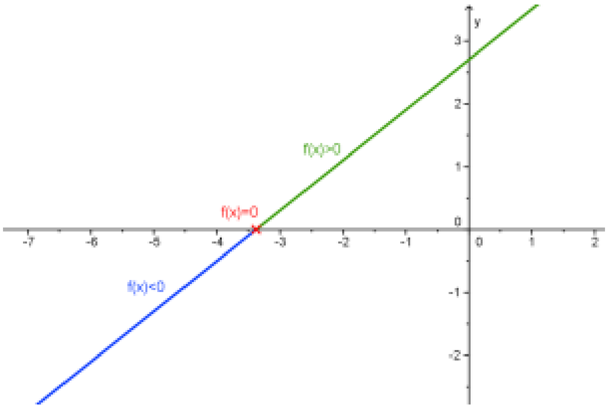
**1.** $3x + 1 > -x + 5$
$f: y = 3x + 1$
$g: y = -x + 5$
Inequality can be rewritten: $f(x) > g(x)$

$\boldsymbol{x} \in$ ... ... ... ...

**2.** $3x + 1 \leq -x + 5$
$f: y =$
$g: y =$
Inequality can be rewritten: $f(x) \ldots g(x)$

$\boldsymbol{x} \in$ ... ... ... ...

# LINEÁRNÍ FUNKCE – využití při řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav



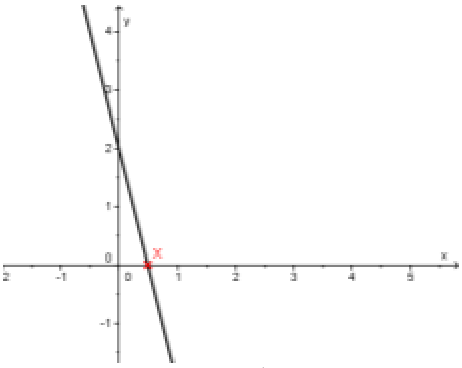

V tomto pracovním listu se dozvíte o tom, jak lze využít grafu lineární funkce při řešení lineárních rovnic a nerovnic nebo jejich soustav.

V kartézské soustavě vlevo je sestrojen ukázkový graf lineární funkce.
Část grafu funkce, pro níž jsou všechny funkční hodnoty větší než nula, je vyznačena zelenou barvou.
Část grafu funkce, pro níž jsou všechny funkční hodnoty menší než nula, je vyznačena zelenou barvou.
Bod, ve kterém je funkce rovna nule, je červený.

**Příklad:**
Sestrojte graf lineární funkce $f: y = -4x + 2$ a zjistěte z něj, pro která $x \in R$ platí:

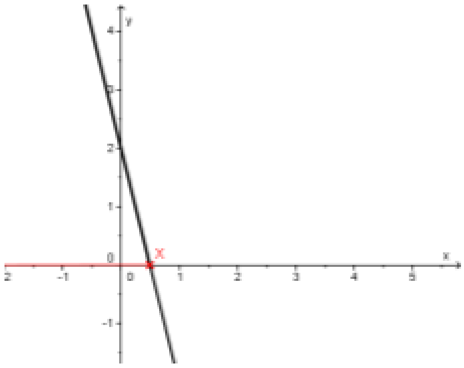
**1.** $-4x + 2 = 0$
**2.** $-4x + 2 > 0$
**3.** $-4x + 2 < 0$
**4.** $-4x + 2 \leq -2$
**5.** $-6 \leq -4x + 2 < 2$

**1.** $\boldsymbol{-4x + 2 = 0}$



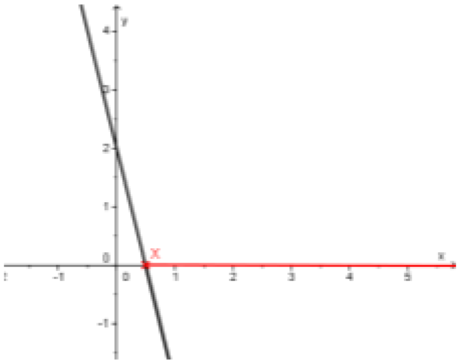
$$x = \frac{1}{2}$$

**2.** $\boldsymbol{-4x + 2} > 0$



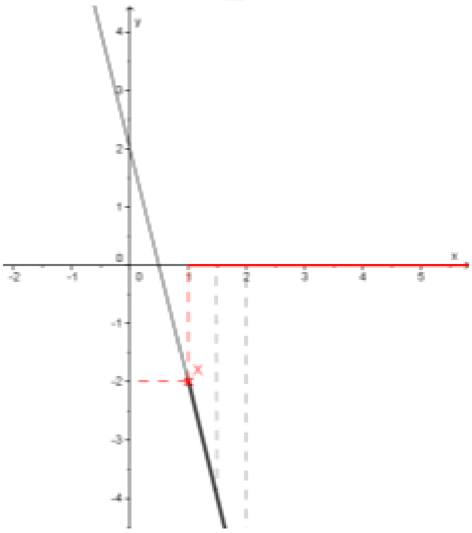
$$x \in \left(-\infty;\quad\right)$$

**4.** $\boldsymbol{-4x + 2} < 0$



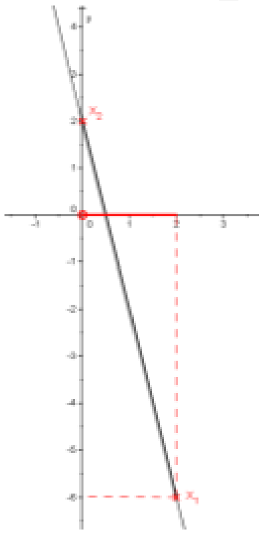
$$x \in \left(\frac{1}{2}; \dots\right)$$

**5.** $\boldsymbol{-4x + 2 \leq -2}$



$x \in$ ……………

**6.** $\boldsymbol{-6 \leq -4x + 2} < 2$

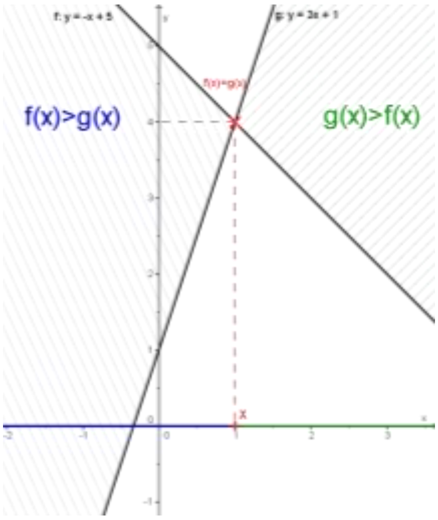


$x \in$ ……………

**Cvičení:** Sestrojte graf lineární funkce $g: y = -2x + 1$ a zjistěte z něj, pro která $x \in R$ platí:

**1.** $-2x + 1 \geq 0$
**2.** $-2x + 1 = 0$
**3.** $-2x + 1 < 0$
**4.** $-2x + 1 \geq -3$

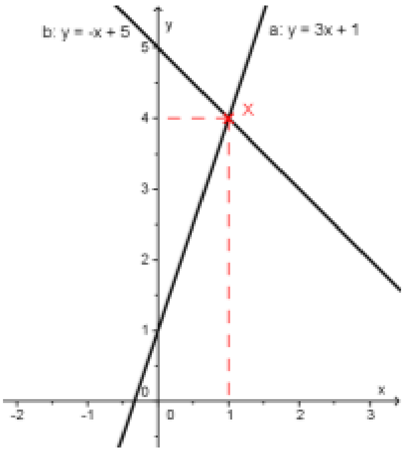
## GRAFICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC A NEROVNIC




V soustavě souřadnic jsou sestrojeny grafy funkcí $f$ a $g$.
Funkce $f$ je …………..(rostoucí/klesající)
Funkce g je…………..(rostoucí/klesající)

Funkce f a g mají společný/ch právě ………..(počet) bod/bodů.
Tento bod je označen ……………..barvou a platí v něm: $f(x) = g(x)$.
Z grafu můžeme také určit, pro která reálná čísla x jsou funkční hodnoty jedné funkce větší než druhé (viz obrázek).
Zjednodušeně lze říci, že funkční hodnoty jedné funkce jsou větší než funkční hodnoty druhé funkce, jestliže je její graf výše (nad grafem druhé funkce).

**Příklad:** Řešte graficky soustavu lineárních rovnic s neznámými $x, y \in R$:




$y = 3x + 1$

$\underline{y = -x + 5}$

Vyřešit soustavu rovnic znamená najít takovou uspořádanou dvojici čísel $x$, $y$, která splňuje obě dvě rovnice.
Na každou rovnici můžeme pohlížet také jako na rovnici přímky, předpis lineární funkce. Řešením soustavy jsou souřadnice průsečíku těchto přímek.

V příkladu sestrojeném v soustavě souřadnic je řešením bod
$X[x; y] = [\quad;\quad]$.

**Cvičení:** Řešte graficky rovnici: $3x + 1 = -x + 5$ (využijte grafu sestrojeného výše)
$X[x; y] = [\quad;\quad]$

**Cvičení:** Řešte početně soustavu lineárních rovnic s neznámými $x, y \in R$:
$y = 3x + 1$
$y = -x + 5$
Řešení:
$y = 3x + 1$
$\underline{y = -x + 5}$ -
$0 = \ldots - 4$
$.. = 4x \ \ /(:4)$
$x = ..$
$y = -x + 5 = .. + 5 = ...$
$\boldsymbol{X}[\quad;\quad]$.

Grafické řešení soustav lineárních rovnice se uplatňuje např. při řešení úloh o pohybu nebo jiných typech slovních úloh.

## GRAFICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH NEROVNIC

**Příklad:** Řešte graficky nerovnici (využijte grafu sestrojeného výše):

1. $3x + 1 > -x + 5$
   $f: y = 3x + 1$
   $g: y = -x + 5$
   Nerovnici lze přepsat $f(x) > g(x)$

   $\boldsymbol{x} \in$ ………….

2. $3x + 1 \le -x + 5$
   $f: y =$
   $g: y =$
   Nerovnici lze přepsat $f(x)$ … $g(x)$

   $\boldsymbol{x} \in$ ………….

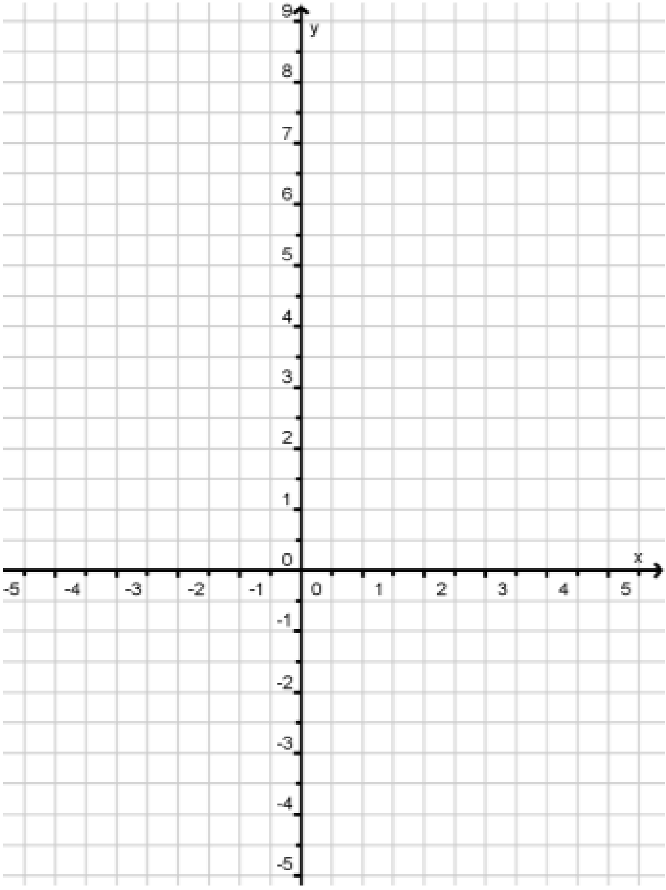
# QUADRATIC FUNCTION without the linear term - graph

**Example:** Construct graphs of following functions to the prepared coordinate system. To each formula of a function construct a graph of the same colour.

**1.** $f_1: y = x^2$ $V_1[\ ;\ ]$
$f_2: y = x^2 - 1$ $V_2[\ ;\ ]$
$f_3: y = x^2 + 1$ $V_3[\ ;\ ]$
$f_4: y = x^2 - 2$ $V_4[\ ;\ ]$
$f_5: y = x^2 - 3,5$ $V_5[\ ;\ ]$
$f_6: y = x^2 + \frac{1}{2}$ $V_6[\ ;\ ]$

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | | |

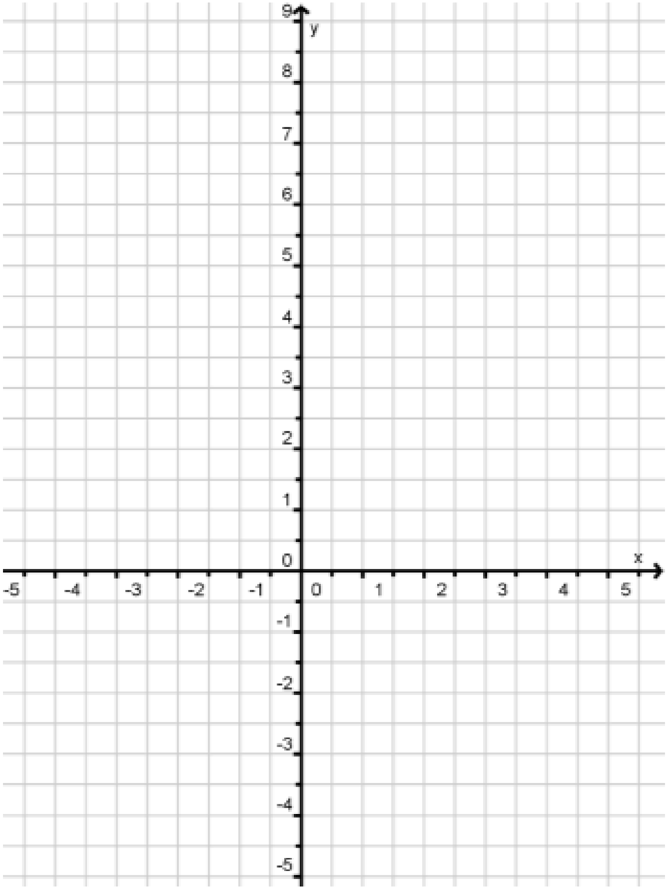
| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | |




**2.** $f_1: y = -0,5x^2$ $V_1[\ ;\ ]$
$f_2: y = -0,5x^2 - 1$ $V_2[\ ;\ ]$
$f_3: y = -0,5x^2 + 3$ $V_3[\ ;\ ]$
$f_4: y = -0,5x^2 - 2$ $V_4[\ ;\ ]$

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |



**The vertex of a parabola, which is the graph of a quadratic function with a formula $y = ax^2 + c$ , has coordinates: $V_1[\quad ; \quad]$**

**3.** $f_1: y = x^2$ $\qquad V_1[\quad ; \quad]$

$f_2: y = -x^2$ $\qquad V_2[\quad ; \quad]$

$f_3: y = 2x^2$ $\qquad V_3[\quad ; \quad]$

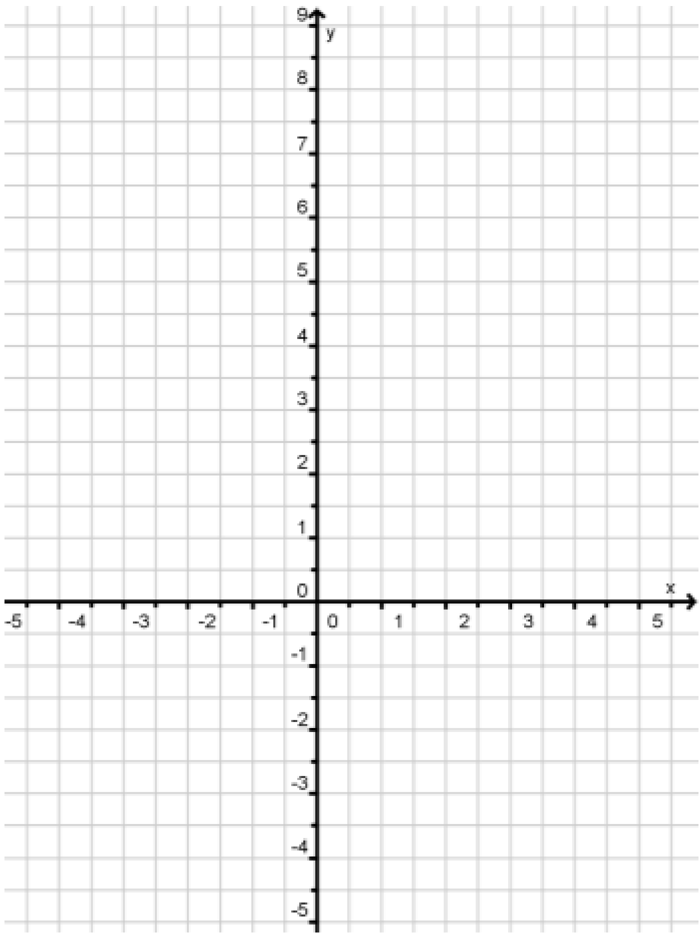
$f_4: y = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad V_4[\quad ; \quad]$

$f_5: y = -\frac{1}{2}x^2$ $\qquad V_5[\quad ; \quad]$

$f_6: y = 3x^2$ $\qquad V_6[\quad ; \quad]$

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | | |

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | |




## PROPERTIES OF A QUADRATIC FUNCTION $f: y = ax^2$

convex $\qquad$ concave

- Graph of the quadratic function is convex for $a$ ☐ 0.

  Graph of the quadratic function is concave for $a$ ☐ 0.

- As $|a|$ increases, the graph ............................. (becomes wider/ becomes narrower)
  As $|a|$ desreases, the graph ............................. (becomes wider/ becomes narrower)

- The vertex of a parabola, which is the graph of a function $y = ax^2$ has coordinates: $V[\quad ; \quad]$

- For $a > 0$ is $H_f =$ ... ... ... ... ... ..
- For $a < 0$ is $H_f =$ ... ... ... ... ... ..

- $a > 0$ function is increasing for $x \in$
  $a < 0$ function is increasing for $x \in$
- $a > 0$ function is decreasing for $x \in$
  $a < 0$ function is decreasing for $x \in$

## A GRAPH AND PROPERTIES OF THE FUNCTION $y = ax^2 + c$

- The graph is a parabola
- For $a > 0$ is the parabola convex
  For $a < 0$ is the parabola concave
- The vertex of the parabola has coordinates $V[0; b]$
- The value of a parameter $a$ affects the width of the parabola, the value of a parameter $c$ determines a translation of parabola in y-direc

# KVADRATICKÁ FUNKCE bez lineárního členu - graf

**Příklad:** Do připravené soustavy souřadnic sestrojte grafy následujících funkcí. Graf sestrojte stejnou barvou, jakou je napsaný předpis funkce:

**1.** $f_1: y = x^2$ $V_1[\ ;\ ]$

$f_2: y = x^2 - 1$ $V_2[\ ;\ ]$

$f_3: y = x^2 + 1$ $V_3[\ ;\ ]$

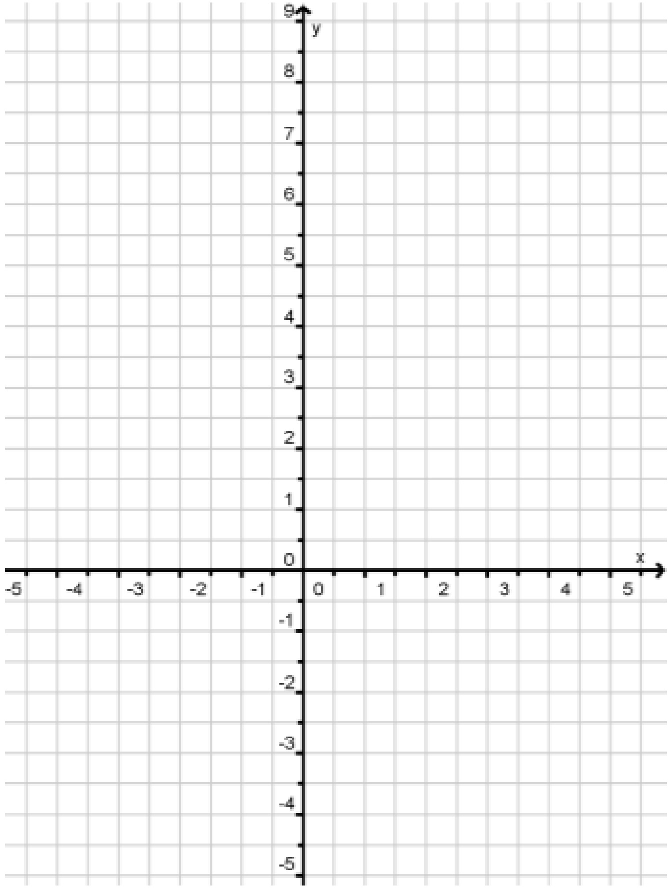
$f_4: y = x^2 - 2$ $V_4[\ ;\ ]$

$f_5: y = x^2 - 3{,}5$ $V_5[\ ;\ ]$

$f_6: y = x^2 + \frac{1}{2}$ $V_6[\ ;\ ]$

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | | |

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | |




**2.** $f_1: y = -0{,}5x^2$ $V_1[\ ;\ ]$

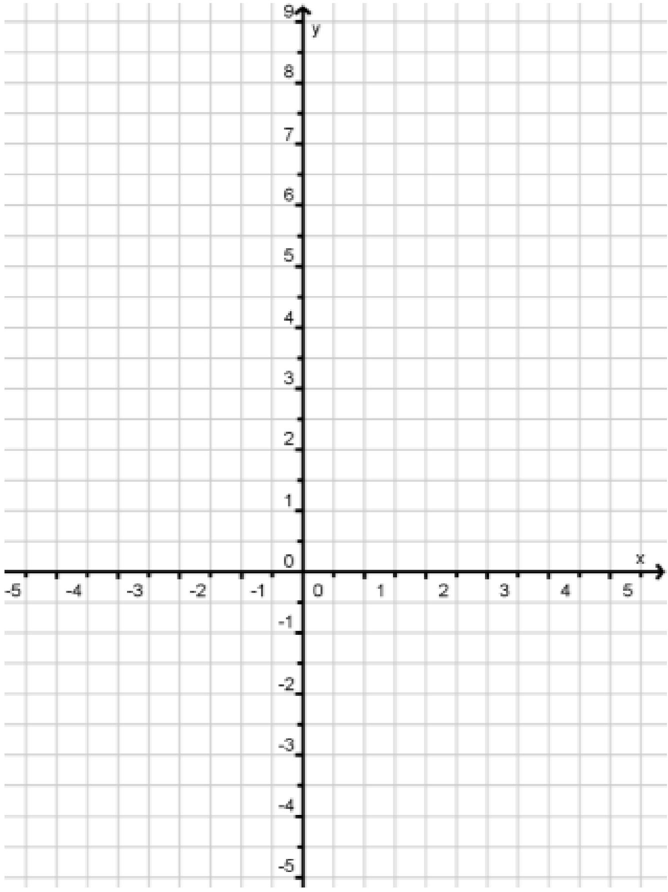
$f_2: y = -0{,}5x^2 - 1$ $V_2[\ ;\ ]$

$f_3: y = -0{,}5x^2 + 3$ $V_3[\ ;\ ]$

$f_4: y = -0{,}5x^2 - 2$ $V_4[\ ;\ ]$

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |



**Vrchol paraboly, která je grafem kvadratické funkce o předpisu $y = ax^2 + c$, má souřadnice: $V_1[\quad;\quad]$**

**3.** $f_1: y = x^2$ $\qquad V_1[\quad;\quad]$

$f_2: y = -x^2$ $\qquad V_2[\quad;\quad]$

$f_3: y = 2x^2$ $\qquad V_3[\quad;\quad]$

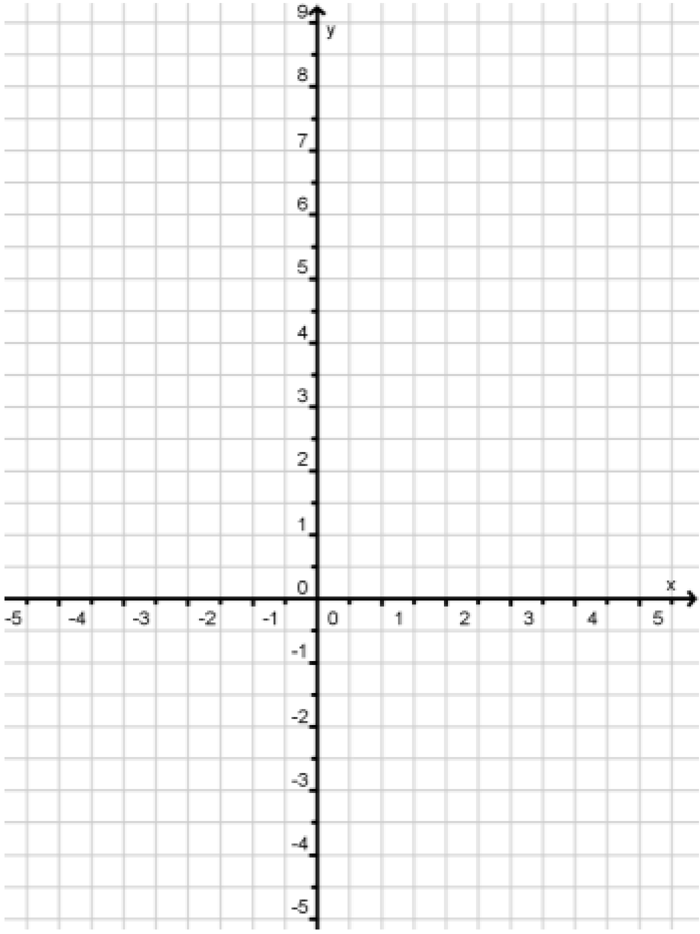
$f_4: y = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad V_4[\quad;\quad]$

$f_5: y = -\frac{1}{2}x^2$ $\qquad V_5[\quad;\quad]$

$f_6: y = 3x^2$ $\qquad V_6[\quad;\quad]$

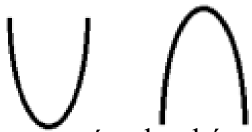
| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | | |

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | |




## VLASTNOSTI KVADRATICKÉ FUNKCE $f: y = ax^2$

- Graf kvadratické funkce je konvexní pro $a \square 0$.
  Graf kvadratické funkce je konkávní pro $a \square 0$.




- S rostoucí hodnotou $|a|$ se graf ............................. (rozšiřuje/zužuje)
  S klesající hodnotou $|a|$ se graf ..............................(rozšiřuje/zužuje)
- Vrchol paraboly, která je grafem funkce o předpisu $y = ax^2$ má souřadnice: $V[\quad;\quad]$
- Pro $a > 0$ je $H_f =$ ………………
- Pro $a < 0$ je $H_f =$ ………………
- $a > 0$ funkce je rostoucí pro $x \in$
  $a < 0$ funkce je rostoucí pro $x \in$
- $a > 0$ funkce je klesající pro $x \in$
  $a < 0$ funkce je klesající pro $x \in$

## GRAF A VLASTNOSTI FUNKCE $y = ax^2 + c$

- Grafem je parabola
- Pro $a > 0$ je parabola konvexní
  Pro $a < 0$ je parabola konkávní
- Vrchol paraboly má souřadnice $V[0; c]$
- Hodnota koeficientu $a$ ovlivňuje šířku paraboly, hodnota koeficientu $c$ určuje velikost posunutí paraboly ve směru osy y

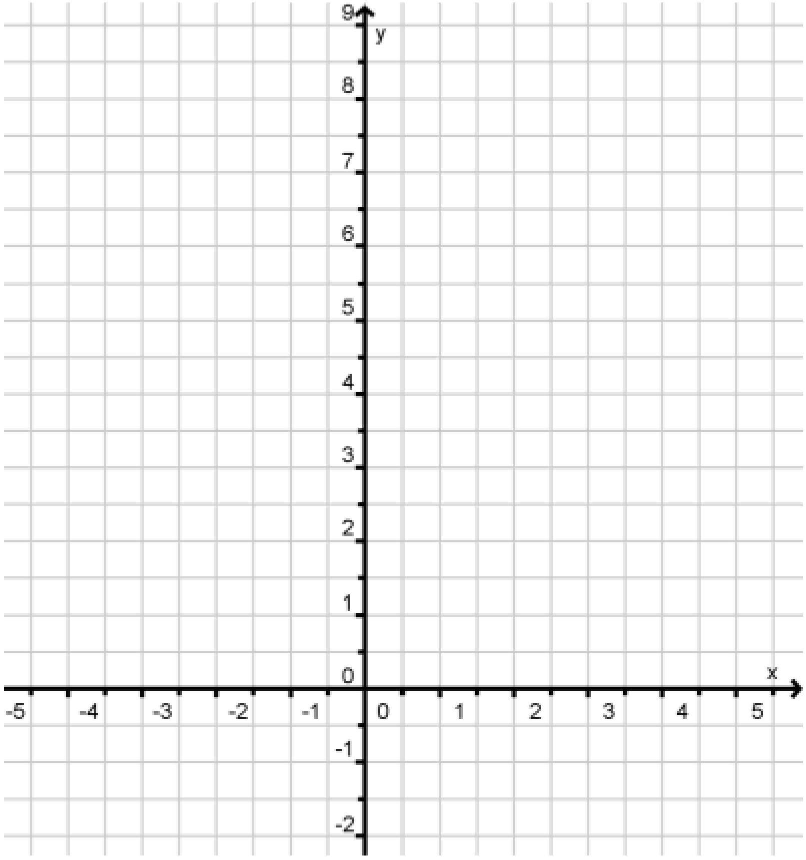
# QUADRATIC FUNCTION – graph of a general quadratic function

**Example:** Construct graphs of following functions to the prepared coordinate system. To each formula of a function construct a graph of the same colour:

**1.** $f_1: y = x^2$ $V_1[\ \ ;\ \ ]$
$f_2: y = (x-1)^2$ $V_2[\ \ ;\ \ ]$
$f_3: y = (x+1)^2$ $V_3[\ \ ;\ \ ]$
$f_4: y = (x-2)^2$ $V_4[\ \ ;\ \ ]$
$f_5: y = (x-3,5)^2$ $V_5[\ \ ;\ \ ]$
$f_6: y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $V_6[\ \ ;\ \ ]$

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | | |

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | |




## Graph and properties of a quadratic function $f: y = (x+b)^2$

- The graph is a parabola.
- A vertex of the parabola, which is the graph of the function $y = (x+b)^2$ , has coordinates: $V[\ \ ;\ \ ]$
- A parabola that is the graph of $y = (x+b)^2$ has the same shape as a parabola with the equation $y = x^2$
- The value of the coefficient $b$ determines the translation of a parabola in $x$-direction.
- For $b > 0$ is the vertex translated in the direction of the positive half-axis $x$
  For $b < 0$ the vertex translated in the direction of the negative half-axis $x$

## GRAPH OF A GENERAL QUADRATIC FUNCTION

**Quadratic function *f* on set R is any function that has a formula:**

$\boxed{f\!: y = \qquad\qquad}$ **,with** $a \in\ \ , b \in\ \ , c \in\ \ ; a \neq$

Domain of the quadratic function: $D_f =$

- From previous worksheets we know how to construct graphs of quadratic functions of the following types: $y = ax^2; y = x^2 + c$ a $y = (x+b)^2$.

**The coefficient $a$ infuences ………… of the parabola.**
**The coefficient $b$ determines the translation of the graph in ………………………………**
**The coefficient $c$ determines the translation of the graph in ………………………………**

We combine our knowledges and apply them simultaneously to constructing of the graph of a general quadratic function:

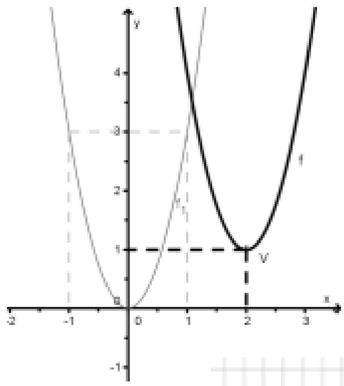
## CONSTRUCTING THE GRAPH OF $f: y = A(x+B)^2 + C$

Graph of the function $f: y = A(x+B)^2 + C$ has the same shape as the graph of a function $f_1: y = ax^2$ and a vertex $V[-B; C]$

1. Sketch the graph of the function $f_1: y = ax^2$
2. Translate the graph of the function $f_1$ of C units in the direction of the $y$ axis and of (-B) units in the direction of the $x$ axis.

**Example: Construct a graph of a function:**

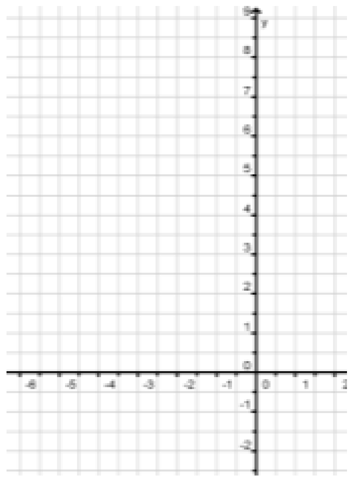
$$f: y = 3(x-2)^2 + 1$$



$f: y = 3(x-2)^2 + 1$
The graph of this function is the same shape as:
$f_1: y = 3x^2$.

$f: y = 3(x-2)^2 + 1$
The vertex has coordinates: $V[+2; +1]$

**Practice: Construct a graph of a function $f: y = 0,5(x+2)^2 - 1$**



$f: y =$
The graph of this function is the same shape as:
$f_1: y =$.

$f: y =$
The vertex has coordinates:

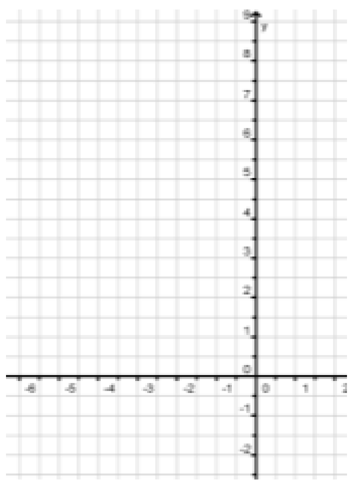
**Example: Construct a graph of a function $f: y = 2x^2 + 8x - 1$**

At first we modify the formula to a form, from we can easily determine the coordinates of the peak and the shape of the graph..

$$y = 2x^2 + 8x - 1 = 2(x^2 + 4x) - 1 = 2(x^2 + 4x + 2^2) - 2^2 - 1 =$$
$$= 2(x+2)^2 - 5$$

(The used procedure is called „completing the square“ and the next worksheet deals with it.)

$f: y = 2(x+2)^2 - 5$
$f_1: y =$
$V[\_\_\_; \_\_\_]$



**Practice:** Determine coordinates of the vertex:

1. $y = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 5;$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
2. $y = 0{,}5x^2 + 0{,}2,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
3. $y = \frac{9}{4}(x-1)^2 - 1,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
4. $y = x^2 - 2x + 3,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
5. $y = -x^2 - 6x - 8,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$

# KVADRATICKÁ FUNKCE – graf obecné kvadratické funkce

**Příklad:** Do připravené soustavy souřadnic sestrojte grafy následujících funkcí. Graf sestrojte stejnou barvou, jakou je napsaný předpis funkce:

**3.** $f_1: y = x^2$ $V_1[\ ;\ ]$

$f_2: y = (x-1)^2$ $V_2[\ ;\ ]$

$f_3: y = (x+1)^2$ $V_3[\ ;\ ]$

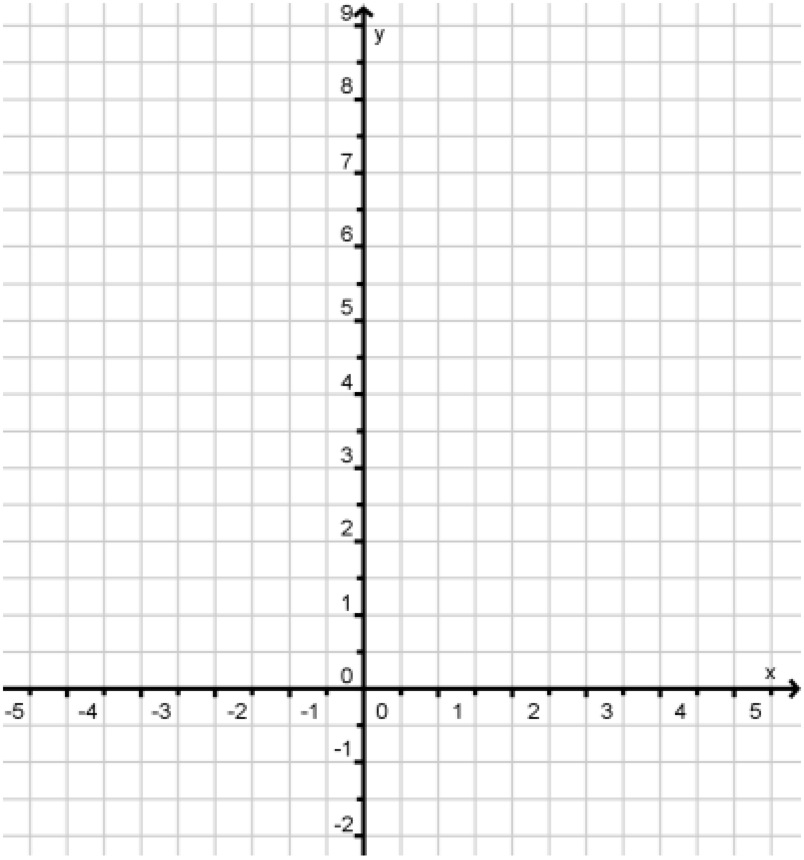
$f_4: y = (x-2)^2$ $V_4[\ ;\ ]$

$f_5: y = (x-3{,}5)^2$ $V_5[\ ;\ ]$

$f_6: y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ $V_6[\ ;\ ]$

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | | |

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |
| $f_2(x)$ | | | | | |
| $f_3(x)$ | | | | | |
| $f_4(x)$ | | | | | |
| $f_5(x)$ | | | | | |
| $f_6(x)$ | | | | | |




## Graf a vlastnosti kvadratické funkce $f: y = (x+b)^2$

- Grafem je parabola
- Vrchol paraboly, která je grafem funkce o předpisu $y = (x+b)^2$ má souřadnice: $V[\ ;\ ]$
- Parabola, která je grafem funkce $y = (x+b)^2$ má stejný tvar jako parabola s rovnicí $y = x^2$
- Hodnota koeficientu $b$ určuje velikost posunutí paraboly ve směru osy $x$.
- Pro $b > 0$ je vrchol paraboly posunut ve směru kladné poloosy $x$
  Pro $b < 0$ je vrchol paraboly posunut ve směru záporné poloosy $x$

## GRAF OBECNÉ KVADRATICKÉ FUNKCE

**Kvadratická funkce *f* na množině R je každá funkce, která má předpis ve tvaru:**

$\boxed{f: y = \qquad}$ **,kde** $a \in\ ,b \in\ ,c \in\ ;a \neq$

Definiční obor kvadratické funkce: $D_f =$

- Z předchozích pracovních listů umíme sestrojit grafy následujících typů kvadratických funkcí: $y = ax^2$; $y = x^2 + c$ **a** $y = (x+b)^2$.

**Koeficient *a* ovlivňuje …………. paraboly.**
**Koeficient *b* souvisí s posunem grafu ve směru osy …..**
**Koeficient *c* určuje posunutí ve směru osy ……..**

Nyní naše poznatky spojíme a aplikujeme je současně při sestrojení grafu obecné kvadratické funkce:

## KONSTRUKCE GRAFU $f\colon y = A(x+B)^2 + C$

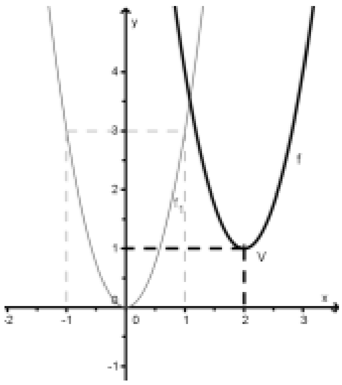
Graf funkce $f\colon y = A(x+B)^2 + C$ má stejný tvar jako graf funkce $f_1\colon y = ax^2$ a vrchol $V[-B; C]$

3. Načrtneme graf funkce $f_1\colon y = ax^2$
4. Graf funkce $f_1$ posuneme o $C$ jednotek ve směru osy y a B jednotek po ose x.

**Příklad: Načrtněte graf funkce $f\colon y = 3(x-2)^2 + 1$**

$f\colon y = 3(x-2)^2 + 1$
Graf této funkce má stejný tvar jako graf funkce
$f_1\colon y = 3x^2$.

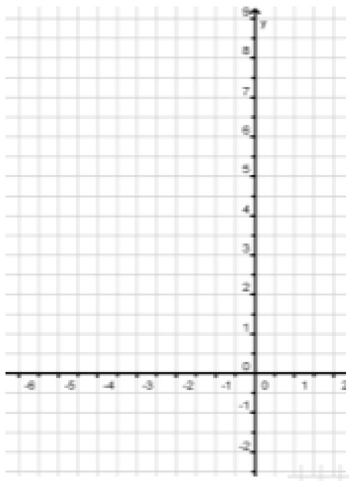
$f\colon y = 3(x-2)^2 + 1$
Vrchol má souřadnice $V[+2; +1]$




**Cvičení: Načrtněte graf funkce $f\colon y = 0,5(x+2)^2 - 1$**

$f\colon y =$
Graf této funkce má stejný tvar jako graf funkce
$f_1\colon y =$.

$f\colon y =$
Vrchol má souřadnice



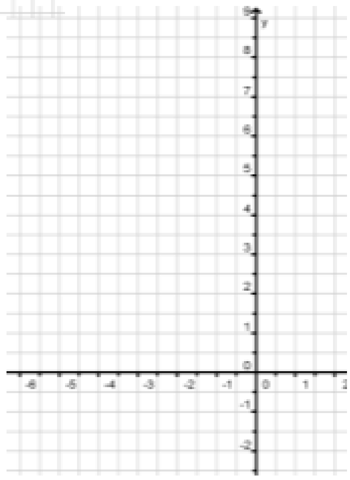
**Příklad: Načrtněte graf funkce $f\colon y = 2x^2 + 8x - 1$**

Nejprve upravíme předpis na vhodný tvar, ze kterého lze snadno určit souřadnice vrcholu a tvar grafu.

$y = 2x^2 + 8x - 1 = 2(x^2 + 4x) - 1 = 2(x^2 + 4x + 2^2) - 2^2 - 1$
$= 2(x+2)^2 - 5$

(Použitá úprava se jmenuje doplnění na čtverec a věnuje se jí příští pracovní list.)

$f\colon y = 2(x+2)^2 - 5$
$f_1\colon y =$
$V[\_\_\_; \_\_\_]$



**Cvičení:** Určete souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce:

6. $y = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 5;$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
7. $y = 0,5x^2 + 0,2,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
8. $y = \frac{9}{4}(x-1)^2 - 1,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
9. $y = x^2 - 2x + 3,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$
10. $y = -x^2 - 6x - 8,$ $V[\_\_\_; \_\_\_]$

# COMPLETING THE SQUARE

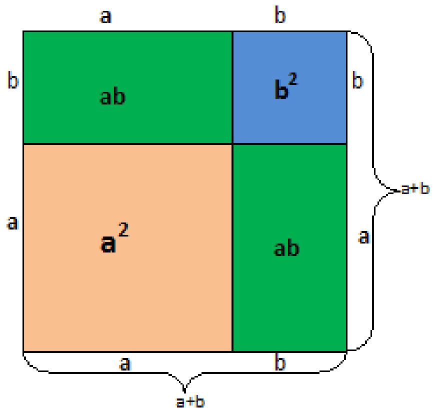
- Completing the square is more precisely called completing to the square of the linear binomial.
- This operation can be used:
  1. In simplifying the formula of a quadratic function while constructing a graph.
  2. In modifying the equations of conics to the vertex form/ center-radius form.
  3. In solving the quadratic equations.

- Completing the square is based on relationships:

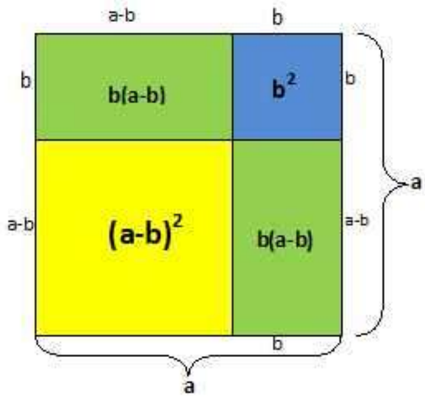
$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

These relationships can be simply verify by modification of expression on the left side:
$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

We show also the graphical proof:




$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$




$a^2 = b^2 + 2b(a-b) + (a-b)^2$
$(a-b)^2 = a^2 - b^2 - 2b(a-b)$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2 + 2b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**Practice:** Fill in the gaps:

1. $(x+6)^2 = x^2 + 2\cdot 6\cdot x + \_\_\_^2$
2. $(x-2y)^2 = x^2 - 2\cdot \_\_\_\_\_ + (2y)^2$
3. $(3y+2z)^2 = \_\_\_^2 + \_\_\_\_\_ + \_\_\_^2$
4. $(\_\_\_ + 8)^2 = k^2 + 2\cdot 8\cdot \_\_ + \_\_\_^2$
5. $(\_\_ + \_\_)^2 = 9v^2 + \_\_\_\_\_ + \_\_4u^2$
6. $(\quad -3)^2 = \_\_\_ - 6\cdot z + \_\_\_^2$
7. $(x + \_\_)^2 = x^2 + 4x + 4$
8. $(y - \_\_)^2 = y^2 - 12y + \_\_\_$
9. $(z + \_\_)^2 = z^2 + 26z + \_\_\_$
10. $(3x - \_\_)^2 = 9x^2 - 6x + \_\_$
11. $x^2 + 2x + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$
12. $x^2 + 8x + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$
13. $x^2 - 24x + \_\_\_ = (\_\_\_ - \_\_\_\_)^2$
14. $y^2 + 20y + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$
15. $y^2 - \quad y + \_\_\_ = (\_\_\_ - \_\_\_\_)^2$
16. $y^2 + 3y + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$
17. $y^2 - \frac{1}{2}y + \_\_\_ = (\_\_\_ - \_\_\_\_)^2$
18. $y^2 + \frac{3}{4}y + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$
19. $4y^2 + y + \_\_ = 4(\_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_\_) = 4(\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

## ALGORITHM OF COMPLETING THE SQUARE

- Completing the square is a technique for converting a quadratic polynomial of the form $ax^2 + bx + c$ to the form $A(x-B)^2 + C$, where $a, b, c, A, B, C \in R$.
  From this form is for exapmle easy to determine coordinates of the vertex of a parabola.

  First we will deal with a simpler case – completing the normalized polynomial
  (To see applying of general procedure follow the examples on the right side.)

**Normalized quadratic polynomial; $a = 1$**

$$x^2 + bx + c = (x^2 + bx) + c = \left(x^2 + bx + \underline{\ ?\ }\right) + c = \left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + C$$

1. Put the quadratic and the linear monomial to one bracket.
   $x^2 + bx + c = (x^2 + bx) + c$
2. **I.** Add a number to the bracket to get a perfect square.
   $\left(x^2 + bx + \underline{\ ?\ }\right) + c$
   What number do we add to the bracket? (look at exercise 8 to 19).
   The number is solution of the equation: $? = \frac{b}{2}$
   $\left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$
   **II.** We have to substract recetly added value (to keep the same value of the expression).
   $(x^2 + bx) + c = \left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
3. Rewrite the bracket as a perfect square.
   $\left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
4. Done.

**1a.** $x^2 + 6x + 16 = (x^2 + 6x) + 16$
**1b.** $y^2 - 3y + 5 = (y^2 - 3y) + 5$

**2 + 3a.**
$(x^2 + 6x + 3^2) - 3^2 + 16 =$
$= (x+3)^2 + 7$

**2 + 3b.**
$\left[y^2 - 3y + \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right] - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 5 =$
$= \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

**Check:**
**a.** $(x+3)^2 + 7 = x^2 + 6x + 9 + 7 =$
$= x^2 + 6x + 16$

**b.** $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = y^2 - 3y + \frac{9}{4} + \frac{11}{4} =$
$= y^2 - 3y + \frac{20}{4} = y^2 - 3y + 5$

***$a \neq 1$***

1. Factor the coefficient *a* out of the first two terms.
2. We get the normalized polynomial. Next procedure is the same as in the previous case.

$2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3 =$
$= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 \cdot 1 + 3 =$
$= 2(x-1)^2 + 1$
**Check:**
$2(x-1)^2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1$
$2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$

**Practice:** Complete the square:

1. $x^2 + 2x + 6 =$
2. $y^2 - 12y + 3 =$
3. $z^2 + z + 1 =$
4. $-2x^2 + 4x + 7 =$
5. $3y^2 - 9y + 1 =$
6. $2z^2 + 6z + 4 =$
7. $0{,}5x^2 + x + 1 =$

# DOPLNĚNÍ NA ČTVEREC

- Doplnění na čtverec se přesněji označuje jako doplnění na druhou mocninu lineárního dvojčlenu.
- S využitím této úpravy se můžeme setkat při:
  1. Úpravě předpisu kvadratické funkce pro konstrukci grafu
  2. Úpravě rovnic kuželoseček na středový/vrcholový tvar
  3. Řešení kvadratických rovnic

- Při doplnění na čtverec se využívá platnosti vzorců:

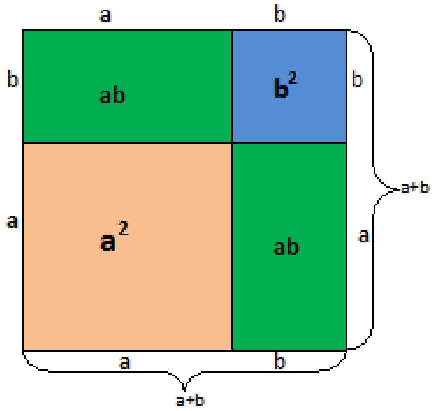
$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Platnost těchto vzorců se dá snadno dokázat úpravou výrazu na levé straně:

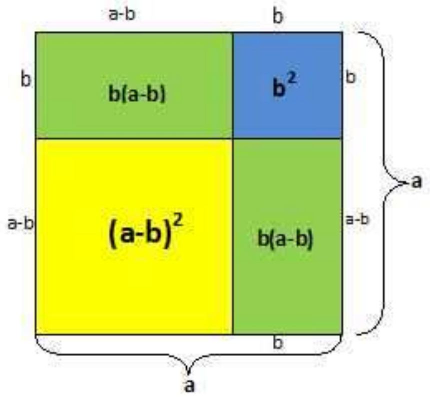
$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Nyní si ukážeme i grafický důkaz:




$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$




$a^2 = b^2 + 2b(a-b) + (a-b)^2$

$(a-b)^2 = a^2 - b^2 - 2b(a-b)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2 + 2b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**Cvičení:** Doplňte vynechaná místa:

**1.** $(x+6)^2 = x^2 + 2\cdot 6\cdot x + \_\_\_^2$

**2.** $(x-2y)^2 = x^2 - 2\cdot \_\_\_\_\_ + (2y)^2$

**3.** $(3y+2z)^2 = \_\_\_^2 + \_\_\_\_\_ + \_\_\_^2$

**4.** $(\_\_\_ + 8)^2 = k^2 + 2\cdot 8\cdot \_\_ + \_\_\_^2$

**5.** $(\_\_ + \_\_)^2 = 9v^2 + \_\_\_\_\_ + \_\_4u^2$

**6.** $(\quad -3)^2 = \_\_\_ - 6\cdot z + \_\_\_^2$

**7.** $(x + \_\_)^2 = x^2 + 4x + 4$

**8.** $(y - \_\_)^2 = y^2 - 12y + \_\_\_$

**9.** $(z + \_\_)^2 = z^2 + 26z + \_\_\_$

**10.** $(3x - \_\_)^2 = 9x^2 - 6x + \_\_$

**11.** $x^2 + 2x + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

**12.** $x^2 + 8x + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

**13.** $x^2 - 24x + \_\_\_ = (\_\_\_ - \_\_\_\_)^2$

**14.** $y^2 + 20y + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

**15.** $y^2 - \quad y + \_\_\_ = (\_\_\_ - \_\_\_\_)^2$

**16.** $y^2 + 3y + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

**17.** $y^2 - \frac{1}{2}y + \_\_\_ = (\_\_\_ - \_\_\_\_)^2$

**18.** $y^2 + \frac{3}{4}y + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

**19.** $4y^2 + y + \_\_ = 4(\_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_) = 4(\_\_\_ + \_\_\_\_)^2$

## ALGORITMUS DOPLNĚNÍ NA ČTVEREC

- Doplnění na čtverec je úprava, kdy výraz ve tvaru $ax^2 + bx + c$ převedeme na tvar $A(x - B)^2 + C$, kde $a, b, c, A, B, C \in R$.
  Z tohoto tvaru lze například snadno určit souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce o tomto předpisu

  Nejprve se budeme zabývat jednodušším případem – doplněním normovaného tvaru
  (Uplatnění obecného postupu můžete sledovat na příkladech uvedených v pravé části stránky)

**Normovaný trojčlen; $a = 1$**

$$x^2 + bx + c = (x^2 + bx) + c = \left(x^2 + bx + \underline{\ ?\ }\right) + c = \left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + C$$

1. Do závorky seskupíme kvadratický a lineární člen zadaného trojčlenu
   $x^2 + bx + c = (x^2 + bx) + c$
2. **I.** K těmto členům přičteme vhodné číslo tak, abychom trojčlen mohli zapsat ve tvaru druhé mocniny dvojčlenu:
   $\left(x^2 + bx + \underline{\ ?\ }\right) + c$
   Jaké číslo je třeba doplnit? (podívejte se pozorně na cvičení 8 až 19).
   Pro hledané číslo platí: $? = \frac{b}{2}$
   $\left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$
   **II.** Aby se nezměnila hodnota výrazu, přičtenou hodnotu musíme za závorkou opět odečíst.
   $(x^2 + bx) + c = \left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
3. Výraz v první závorce zapíšeme jako druhou mocninu dvojčlenu.
   $\left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
4. Hotovo

**1a.** $x^2 + 6x + 16 = (x^2 + 6x) + 16$
**1b.** $y^2 - 3y + 5 = (y^2 - 3y) + 5$

**2 + 3a.**
$(x^2 + 6x + 3^2) - 3^2 + 16 =$
$= (x + 3)^2 + 7$

**2 + 3b.**
$\left[y^2 - 3y + \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right] - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 5 =$
$= \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

**Zkouška:**
**a.** $(x + 3)^2 + 7 = x^2 + 6x + 9 + 7 =$
$= x^2 + 6x + 16$

**b.** $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = y^2 - 3y + \frac{9}{4} + \frac{11}{4} =$
$= y^2 - 3y + \frac{20}{4} = y^2 - 3y + 5$

***$a \neq 1$***

3. Vytkneme z prvních dvou členů koeficient ***a*** kvadratického členu
4. Získali jsme normovaný tvar. Další postup je stejný jako v předchozím případě.

$2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3 =$
$= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 \cdot 1 + 3 =$
$= 2(x - 1)^2 + 1$
**Zkouška:**
$2(x - 1)^2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1$
$2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$

**Cvičení:** Doplňte na čtverec (druhou mocninu kvadratického dvojčlenu)

1. $x^2 + 2x + 6$
2. $y^2 - 12y + 3$
3. $z^2 + z + 1$
4. $-2x^2 + 4x + 7$
5. $3y^2 - 9y + 1$
6. $2z^2 + 6z + 4$
7. $0{,}5x^2 + x + 1$

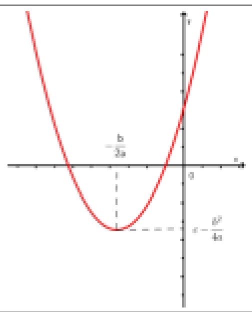
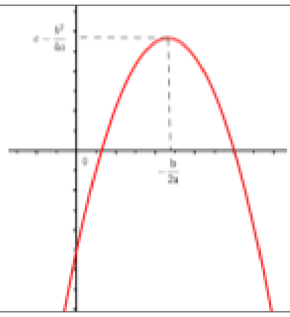
# QUADRATIC FUNCTION – properties

## PROPERTIES OF QUADRATIC FUNCTION

Fill in the gaps general properties of quadratic functions.

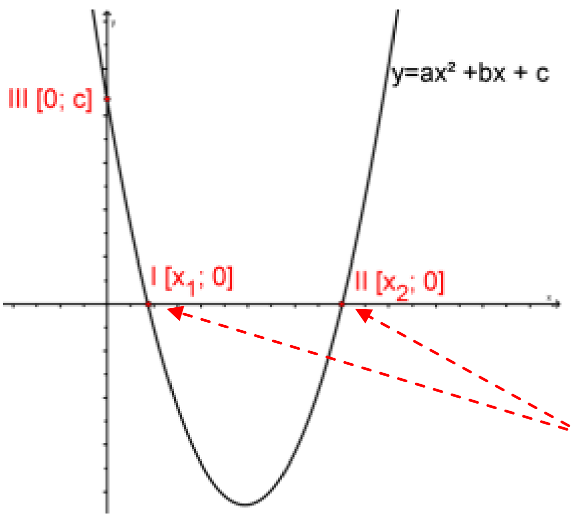
**Quadratic function *f* on set R is any function that has a formula:**

$\boxed{\boldsymbol{f: y =}\qquad\qquad}$ **, kde** $a \in R, a \neq , b \in \ \ , c \in$

| $\boldsymbol{a > 0}$ | $\boldsymbol{a} < 0$ |
|---|---|
|  |  |
| $D_f \ =$ | $D_f \ =$ |
| $H_f \ =$ | $H_f \ =$ |
| **One-to-one** | **One-to-one** |
| Function .........one-to-one (is/ isn't) | Function .........one-to-one (is/ isn't) |
| **Monotonicity** | **Monotonicity** |
| Function ...... ......for $x \in$<br>Function ...... ......for $x \in$<br>(increasing, decreasing, monotonicity) | Function ...... ......for $x \in$<br>Function ...... ......for $x \in$<br>(increasing, decreasing, monotonicity) |
| **Bounded** | **Bounded** |
| Function ...... bounded (is/ isn't) | Function ...... bounded (is/ isn't) |
| **Extremum** | **Extremum** |
| | |
| **Even and odd** | **Even and odd** |
| | |

## GRAPHICAL SOLUTION OF QUADRATIC EQUATIONS AND INEQUALITIES

- First, we will deal with important points on the graph of quadratic function.




There are three important points on the graph of quadratic function.
We mark them as I,II and III.

**III**

Is the intersection of the parabola and y-axis.
We can determine coordinates of this point for every quadratic function with $D_f \ = R$. They are: $[0; c]$

**I, II**

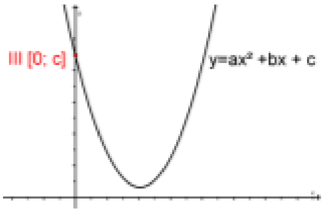
Are intersections of the parabola and x-axis.
First coordinates of these point are solutions of an equation:

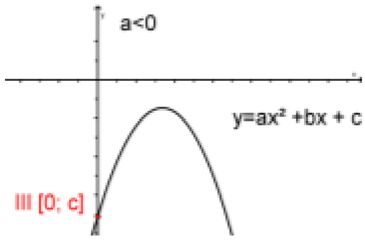
$f(x) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

**1.** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac} < 0$

The equation has no solution.
Points I and II don't exist.

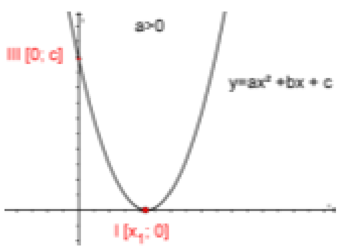


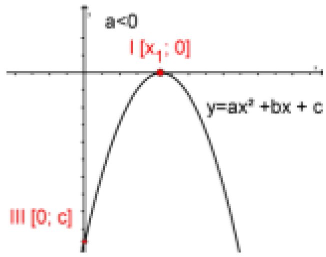




---

**2.** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac = 0}$

The equation has one sollution $x_1$.
$I = II$

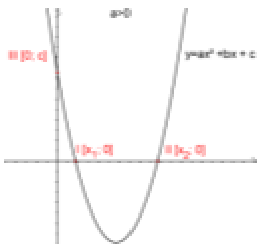


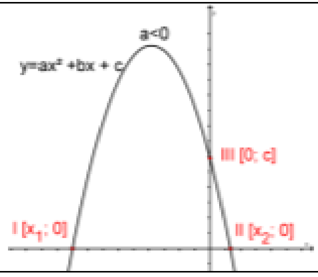




---

**3.** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac} > 0$

The equation has two sollutions $x_1 = x_2$.
$I[x_1; 0]$
$II[x_2; 0]$

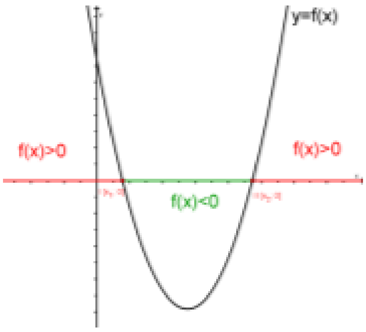


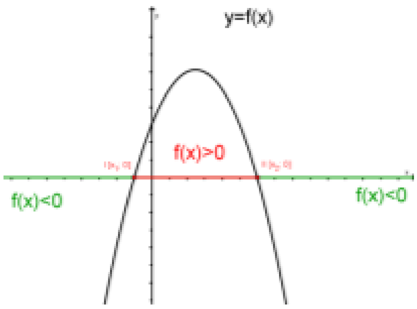


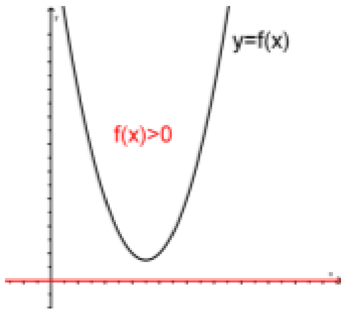

---

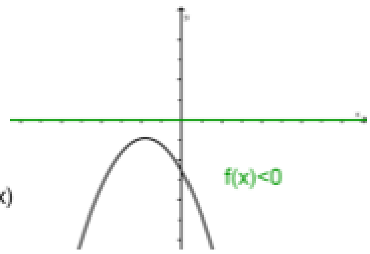
**How to solve quadratic inequations $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \le 0, ax^2 + bx + c > 0}$, ...?**

1. First we the root of quadratic equation: $ax^2 + bx + c = 0$
2. Sketch graph of the quadratic function: $y = ax^2 + bx + c$.
3. Determine the solution from the graph:



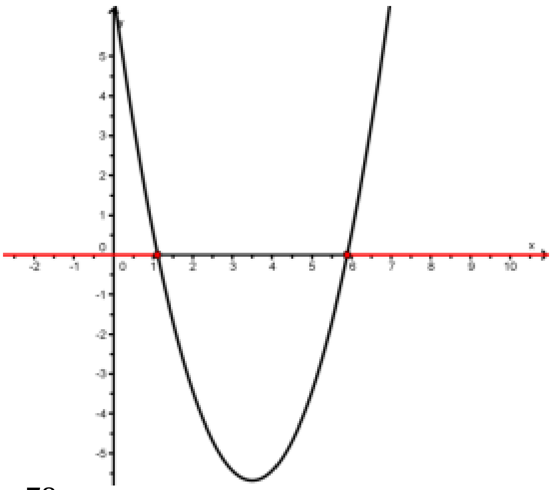

**Example:**

1. $\boldsymbol{x^2 - 14x + 42 \ge 0}$

   Quadratic equation:
   $x^2 - 7x + 6 = 0$
   $(x - 1)(x - 6) = 0$

   $x_1 = 1;\ x_2 = 6$

   $\boldsymbol{x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 6; \infty)}$



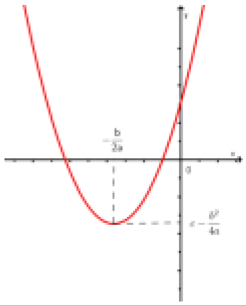
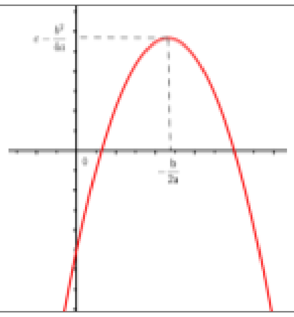
# KVADRATICKÁ FUNKCE – vlastnosti, využití

## VLASTNOSTI KVADRATICKÉ FUNKCE

Doplňte na vynechaná místa obecné vlastnosti lineární funkce:

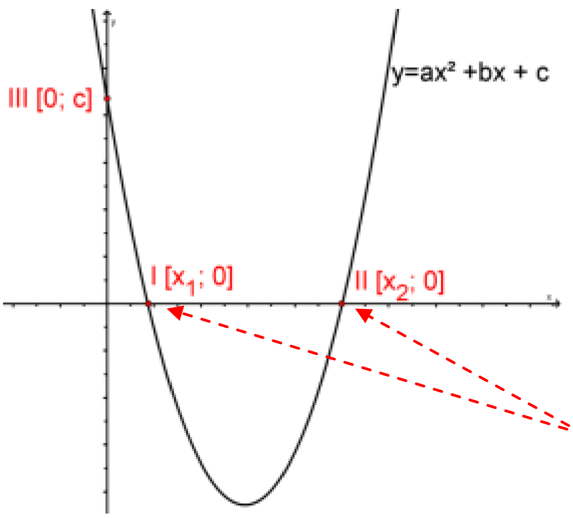
**Lineární funkce *f* na množině R je každá funkce, která má předpis ve tvaru:**

$\boxed{f\colon y = \qquad\qquad}$, **kde** $a \in R, a \neq , b \in \ , c \in$

| $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|
|  |  |
| $D_f =$ | $D_f =$ |
| $H_f =$ | $H_f =$ |
| **Prostá** | **Prostá** |
| Funkce ...........prostá (je/není) | Funkce ...........prostá (je/není) |
| **Monotónnost** | **Monotónnost** |
| Funkce ...... ......pro $x \in$<br>Funkce ...... ......pro $x \in$<br>(rostoucí, klesající, monotónní) | Funkce ...... ......pro $x \in$<br>Funkce ...... ......pro $x \in$<br>(rostoucí, klesající, monotónní) |
| **Omezenost** | **Omezenost** |
| Funkce ...... (je/není)omezená .............. | Funkce ...... (je/není)omezená .............. |
| **Extrémy** | **Extrémy** |
| | |
| **Parita** | **Parita** |
| | |

## GRAF KVADRATICKÉ FUNKCE PŘI ŘEŠENÍ ROVNIC A NEROVNIC

- Nejprve se budeme podrobněji zabývat významnými body na grafu kvadratické funkce.




There are three important points on the graph of quadratic function.
We mark them as I,II and III.

**III**

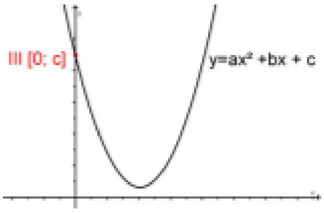
Is the intersection of the parabola and y-axis.
We can determine coordinates of this point for every quadratic function with $D_f = R$.

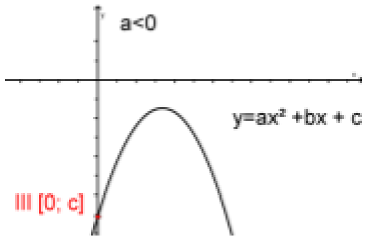
**I, II**

Are intersections of the parabola and x-axis.
First coordinates of these point are solutions of an equation:
$f(x) = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$

**1.** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac} < 0$

The equation has no sollution.
Points I and II don't exist.

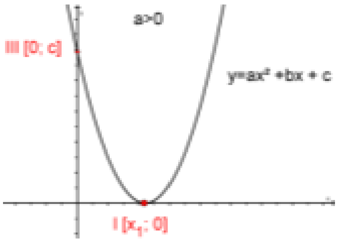


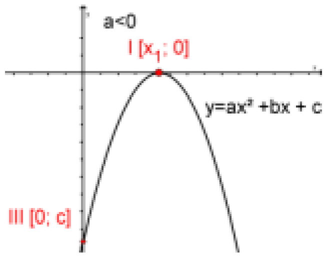




---

**2.** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac = 0}$

The equation has one sollution $x_1$.
$I = II$

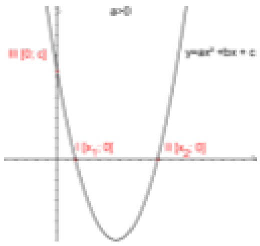


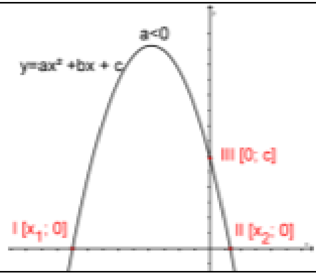




---

**3.** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac} > 0$

The equation has two sollutions $x_1 = x_2$.
$I[x_1; 0]$
$II[x_2; 0]$

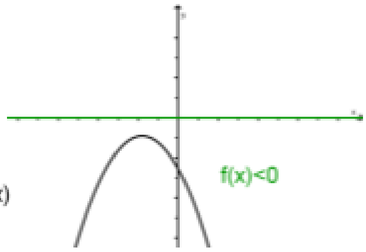


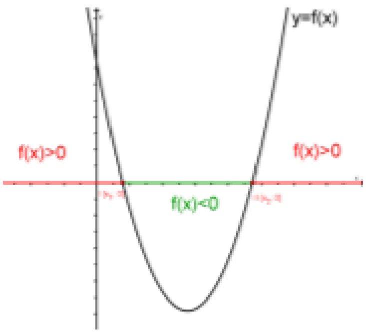


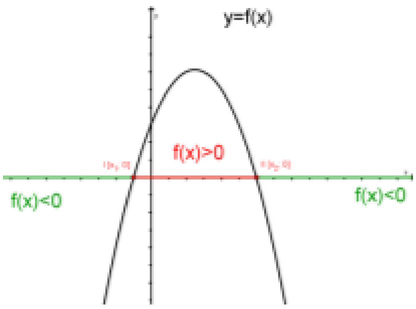

---

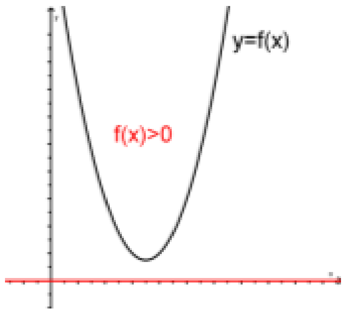
**How to solve quadratic inequations?** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0}; \ldots$

1. First we the root of quadratic equation: $ax^2 + bx + c = 0$
2. Sketch graph of the quadratic function: $y = ax^2 + bx + c$.
3. Determine the solution from the graph:





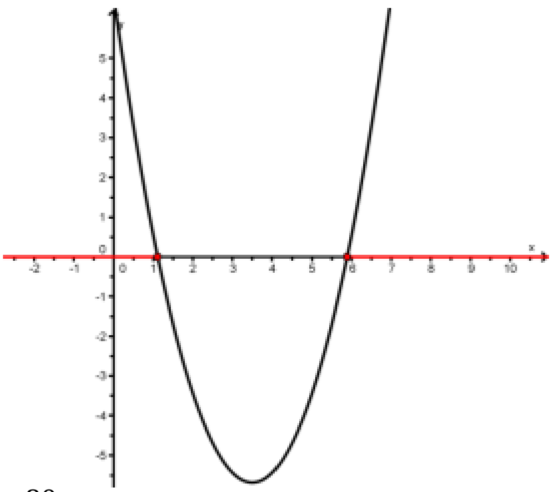

**Example:** Solve:

1. $\boldsymbol{x^2 - 14x + 42 \geq 0}$

   Quadratic equation:
   $x^2 - 7x + 6 = 0$
   $(x - 1)(x - 6) = 0$

   $x_1 = 1;\ x_2 = 6$

   $\boldsymbol{x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 6; \infty)}$



# POWER FUNCTION

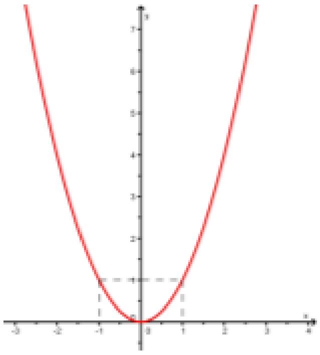
**Power function *f* on set R is any function that has a formula:**

$\boxed{f: y = x^n}$,**with** $n \in$

## I. $\boldsymbol{y = x^n; n \in N}$

***n* is odd**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**One-to-one**

Function .........one-to-one (is/ isn't)

**Monotonicity**

Function ...... ........................for $x \in$

Function ...... ........................

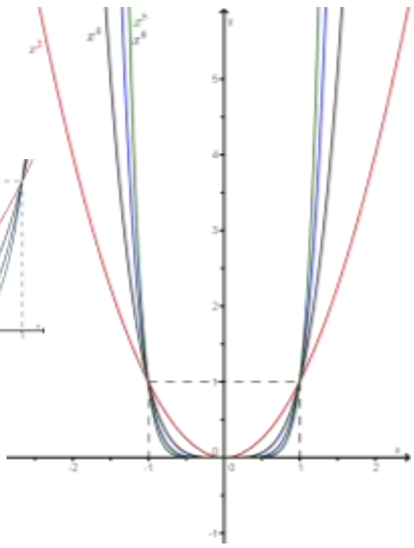
(increasing, decreasing, monotonicity)

**Bounded**

Function ...... bounded (is/ isn't).

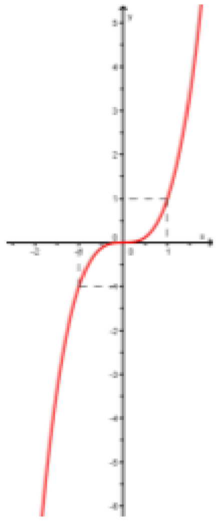
**Extremum**

**Even and odd**



***n* is even**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**One-to-one**

Function .........one-to-one (is/ isn't)

**Monotonicity**

Function ...... ......................for $x \in$

Function ...... ......................for $x \in$

(increasing, decreasing, monotonicity)

**Bounded**

Function ...... bounded (is/ isn't)

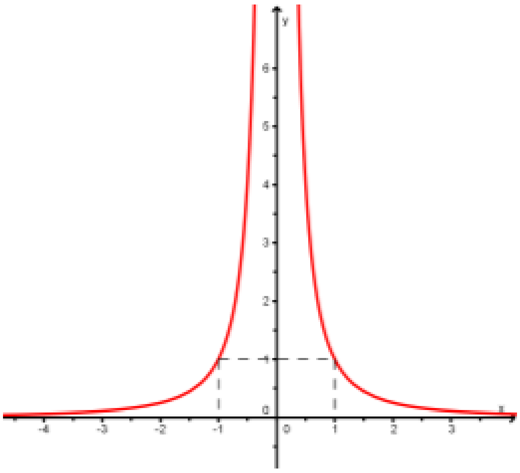
**Extremum**

**Even and odd**

## II. $y = x^{-n}; n \in N$

***n* is odd**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**One-to-one**

Function ………one-to-one (is/ isn't)

**Monotonicity**

Function …… ……………………for $x \in$

Function …… ……………………

(increasing, decreasing, monotonicity)

**Bounded**

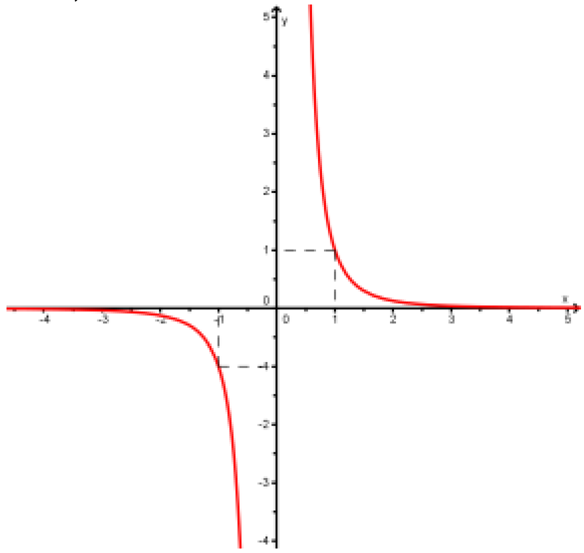
Function …… bounded (is/ isn't).

**Extremum**

**Even and odd**

***n* is even**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**One-to-one**

Function ………one-to-one (is/ isn't)

**Monotonicity**

Function …… …………………..for $x \in$

Function …… …………………..for $x \in$

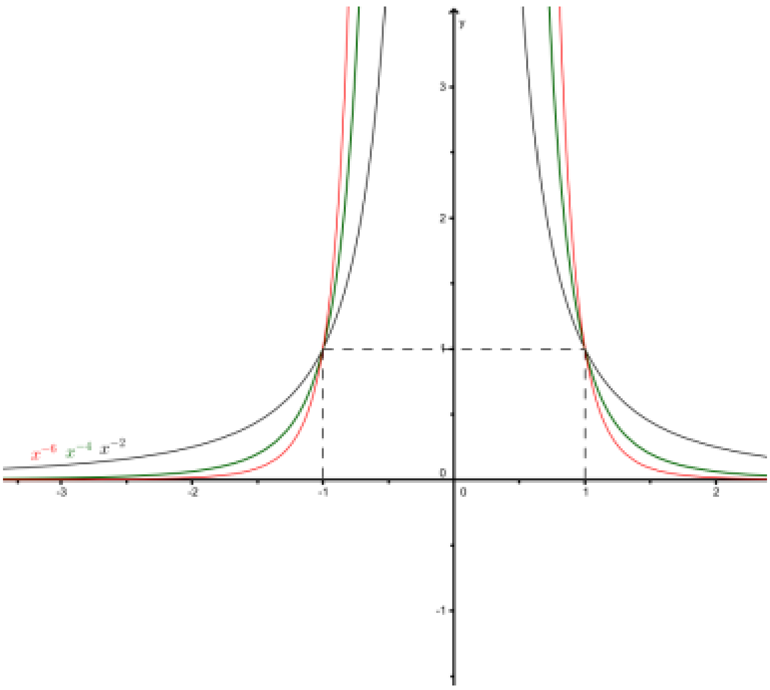
(increasing, decreasing, monotonicity)

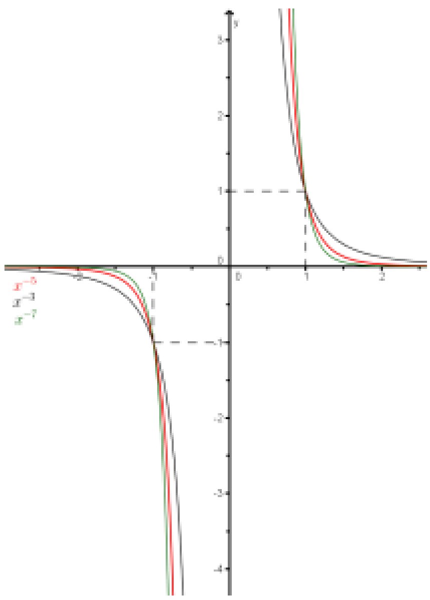
**Bounded**

Function …… bounded (is/ isn't)

**Extremum**

**Even and odd**





# MOCNINNÁ FUNKCE

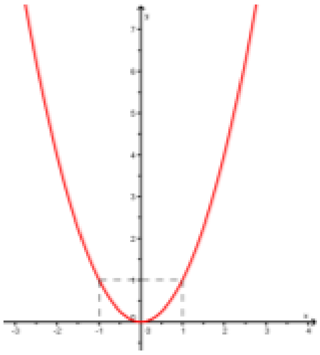
**Mocninná funkce *f* na množině R je každá funkce o předpisu:**

$\boxed{f: y = x^n}$ **,kde** $n \in$

## III. $\boldsymbol{y = x^n; n \in N}$

***n* je sudé**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**Prostá**

Funkce ………prostá (je/ není)

**Monotónnost**

Funkce …… ……………………pro $x \in$

Funkce …… ……………………

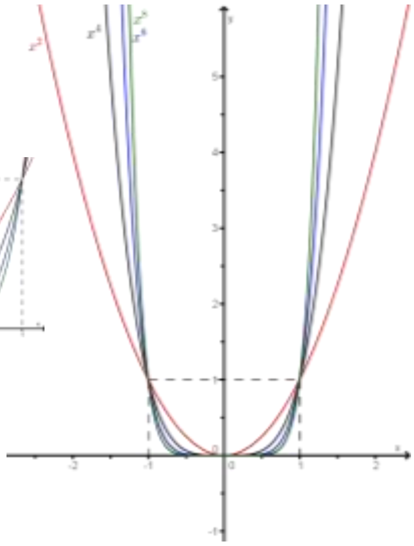
(rostoucí, klesající, monotónní)

**Omezenost**

Function …… bounded (je/ není)

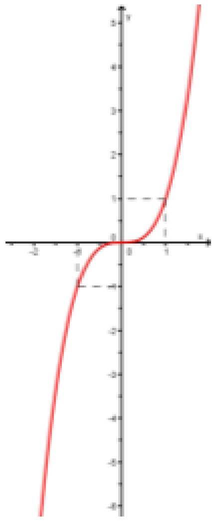
**Extrémy**

**Parita**



***n* je liché**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**Prostá**

Funkce ………prostá (je/ není)

**Monotónnost**

Funkce …… ……………………pro $x \in$

Funkce …… ……………………

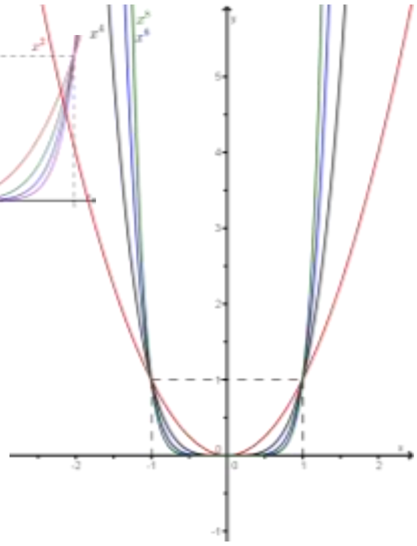
(rostoucí, klesající, monotónní)

**Omezenost**

Function …… bounded (je/ není)

**Extrémy**

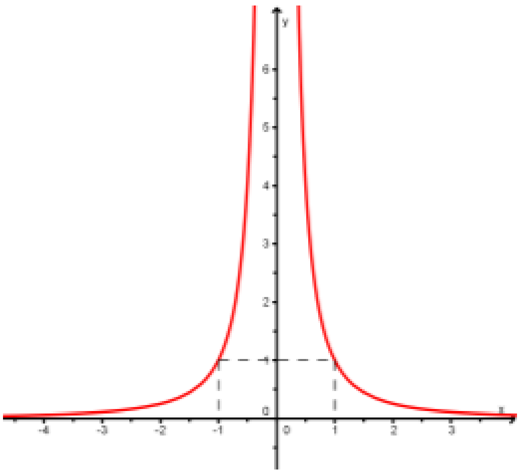
**Parita**



## I. $y = x^{-n}; n \in N$

***n* je sudé**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**Prostá**

Funkce ………prostá (je/ není)

**Monotónnost**

Funkce …… ……………………pro $x \in$

Funkce …… ……………………

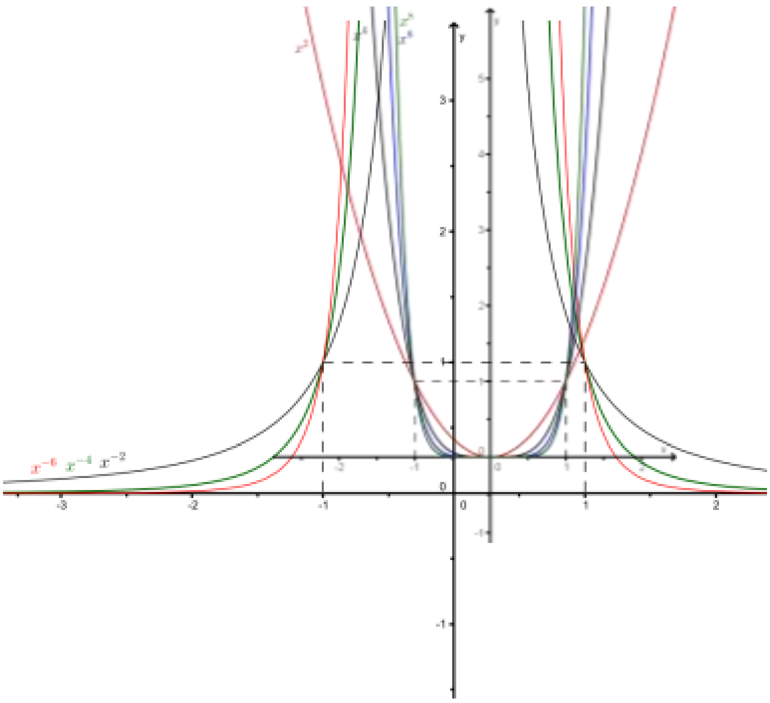
(rostoucí, klesající, monotónní)

**Omezenost**

Function …… bounded (je/ není)

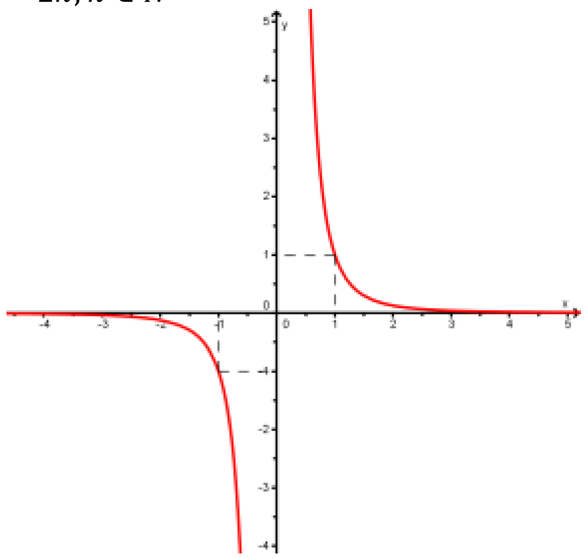
**Extrémy**

**Parita**



***n* je liché**

$n = 2k; k \in N$



$D_f =$

$H_f =$

**Prostá**

Funkce ………prostá (je/ není)

**Monotónnost**

Funkce …… ……………………pro $x \in$

Funkce …… ……………………

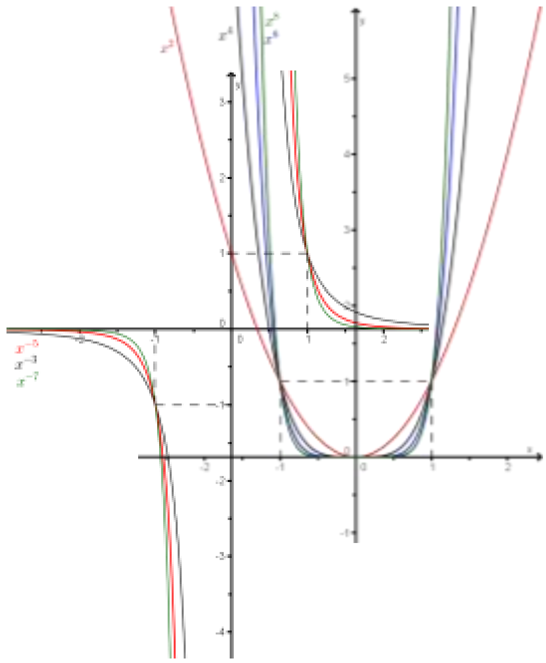
(rostoucí, klesající, monotónní)

**Omezenost**

Function …… bounded (je/ není)

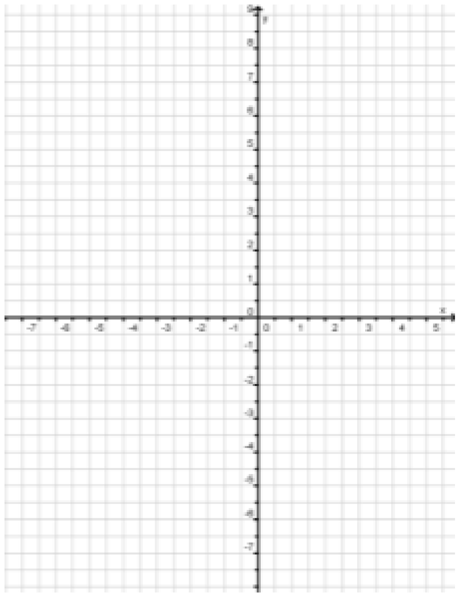
**Extrémy**

**Parita**



# LINEAR FRACTIONAL FUNCTION - worksheet

**Practice 1: Construct graph of function $y = \frac{3{,}4}{x}$ and determine all its properties.**



Asymptotes:

***f*:**

| $x$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | |

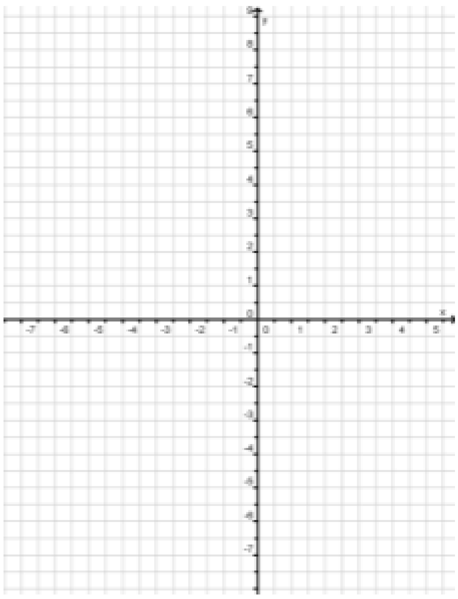
**Properties:**

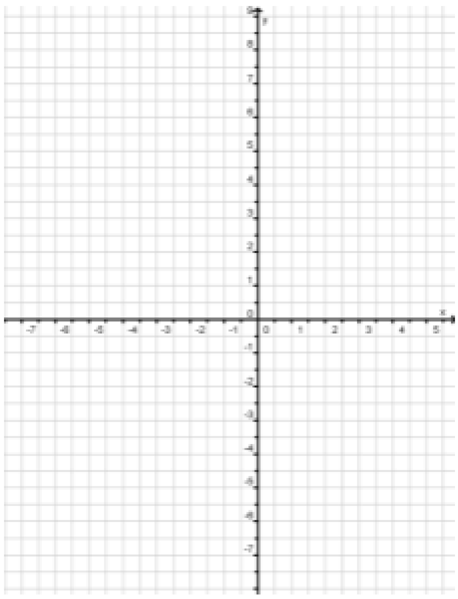
**Practice 2: Decide which of these statements are true and which are false:**

1. Every inverse proportion is even. false/true
2. Every inverse proportion is decreasing. false/true
3. Every inverse proportion is increasing or decreasing function. false/true
4. There is no inverse proportion which is bounded from above. false/true

**Practice 3: Construct graphs of these sets of function to the same coordinate system:**

1. $f_1: y = \frac{2}{x}$; $f_2: y = \frac{2}{x} + 2$; $f_3: y = \frac{2}{x} - 1$
2. $g_1: y = \frac{-1}{x}$; $g_2: y = \frac{-1}{x+1}$; $g_3: y = \frac{-1}{x-2}$





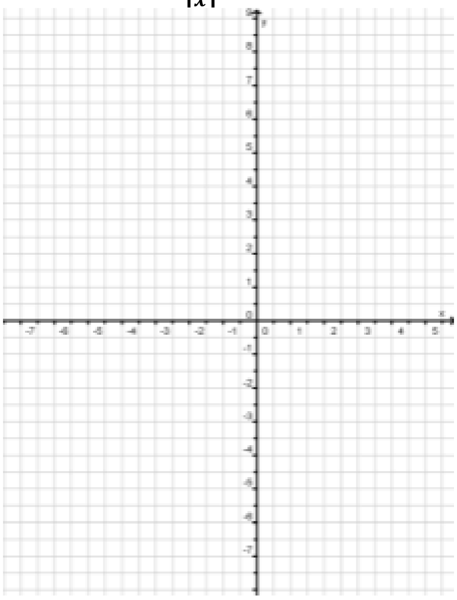
**Practice 4: Determine the range and the domain of functions:**

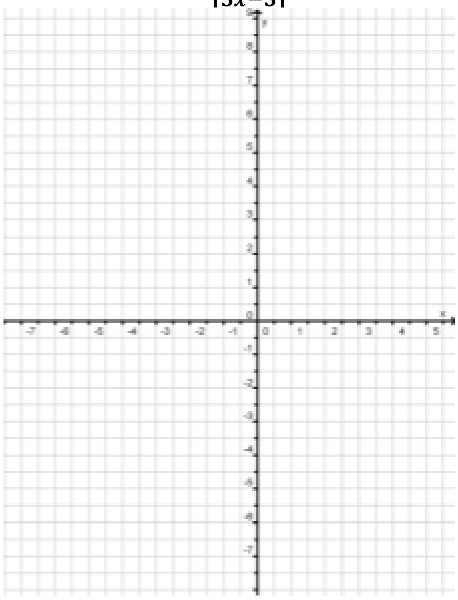
1. $\boldsymbol{f: y = \frac{2}{x-1} + 2}$
2. $\boldsymbol{g: y = \frac{5}{3-x} - 6}$
3. $\boldsymbol{h: y = \frac{2x-2}{x} + 2}$

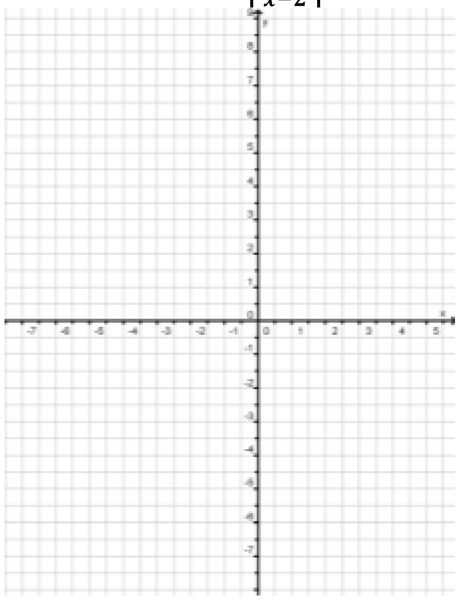
**Practice 5: Construct graph of function: $y = \frac{2x-5}{3-x}$ and determine properties.**

**Practice 6: Sketch graphs of functions:**

1. $f: y = \left|\frac{1}{x}\right|$
2. $g: y = \left|\frac{2}{5x-3}\right|$
3. $h: y = \left|\frac{2x+4}{x-2}\right|$

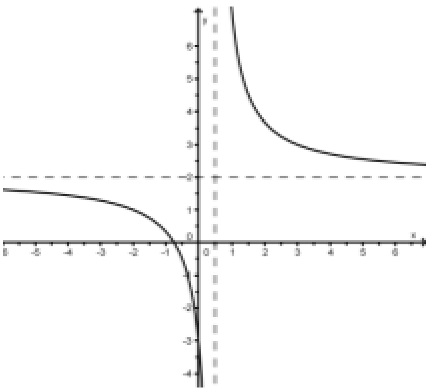




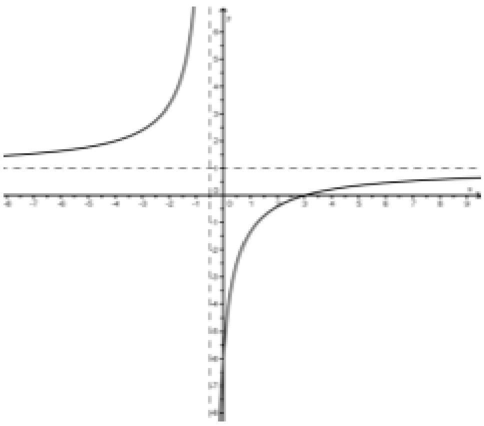


**Practice 7: Assign the graph with correct formula.**

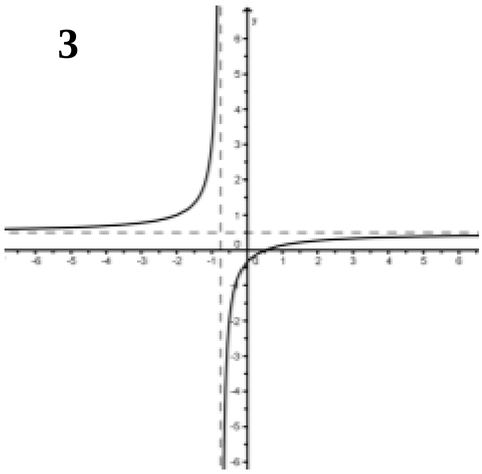
**1**



**2**



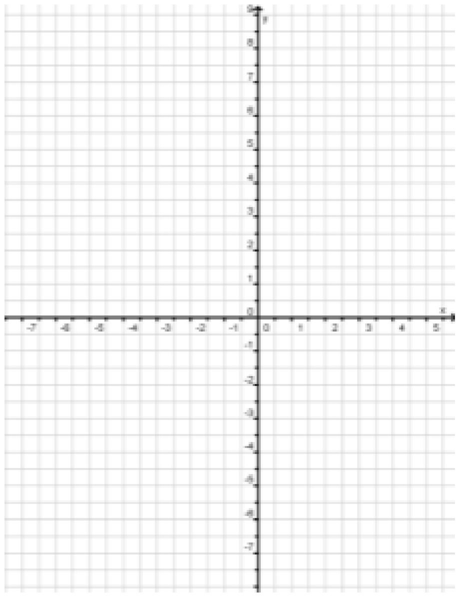
**3**



**A.** $y = \frac{2x-6}{2x+1}$ **B.** $y = \frac{2x-1}{4x+3}$ **C.** $y = \frac{4x+3}{2x-1}$

# LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE – pracovní list

**Cvičení 1: Sestrojte graf funkce $y = \frac{3{,}4}{x}$ a určete její vlastnosti.**



Asymptoty:

*f*:

| $x$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | |

**Vlastnosti:**

**Cvičení 2: Rozhodněte, která tvzerní jsou pravdivá a která nejsou:**

**5.** Každá přímá úměrnost je sudá funkce. pravda/nepravda

**6.** Každá přímá úměrnost je klesající funkce. pravda/nepravda

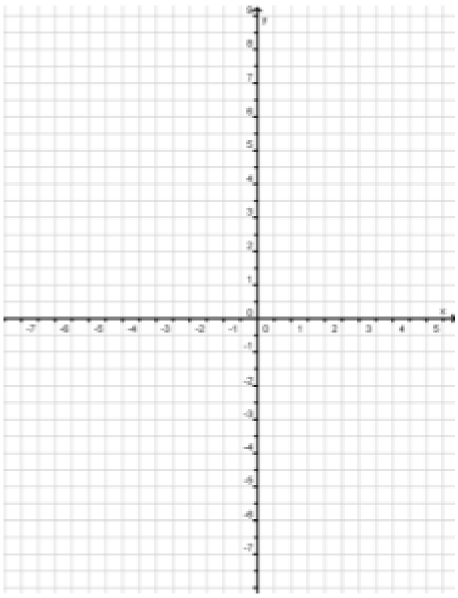
**7.** Každá přímá úměrnost je klesající nebo rostoucí funkce . pravda/nepravda

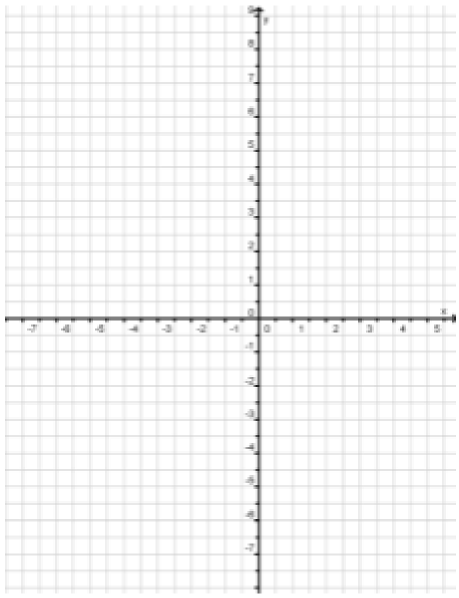
**8.** Existuje shora ohraničená přímá úměrnost. pravda/nepravda

**Cvičení 3: Do připravených souřadnicových systémů sestrojte grafy následujících skupin funkcí:**

**3.** $f_1\colon y = \frac{2}{x}$; $f_2\colon y = \frac{2}{x} + 2$; $f_3\colon y = \frac{2}{x} - 1$

**4.** $g_1\colon y = \frac{-1}{x}$; $g_2\colon y = \frac{-1}{x+1}$; $g_3\colon y = \frac{-1}{x-2}$





**Cvičení 4: Učete definiční obor a obor hodnot funkcí:**

**1.** $\boldsymbol{f\colon y = \frac{2}{x-1} + 2}$

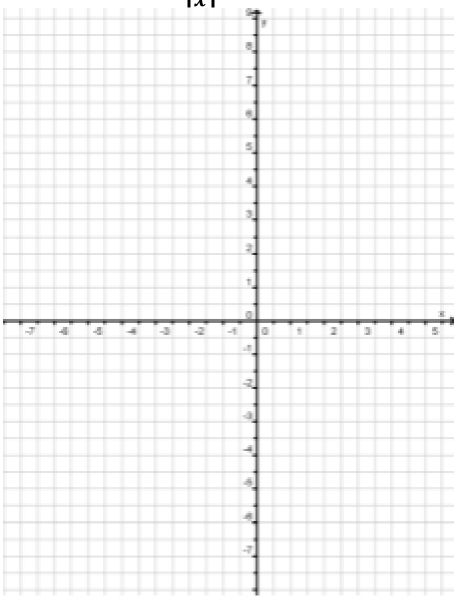
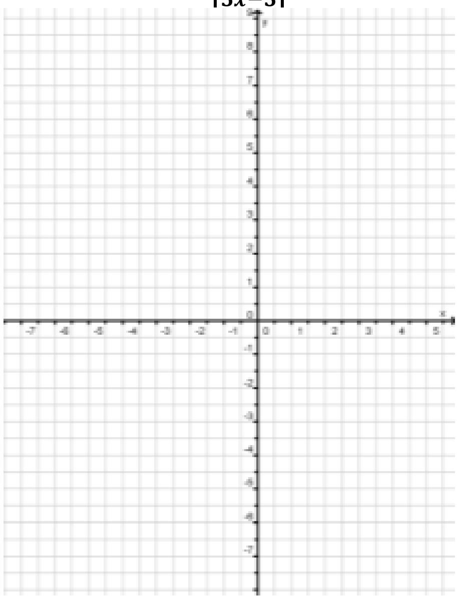
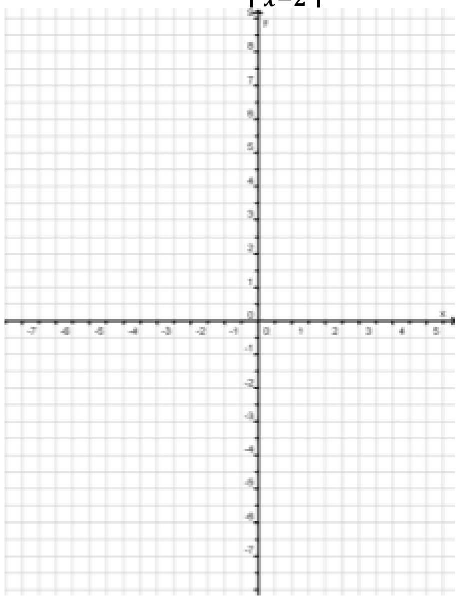
**2.** $\boldsymbol{g\colon y = \frac{5}{3-x} - 6}$

**3.** $\boldsymbol{h\colon y = \frac{2x-2}{x} + 2}$

**Cvičení 5: Sestrojte graf funkce: $y = \frac{2x-5}{3-x}$ a určete vlastnosti.**

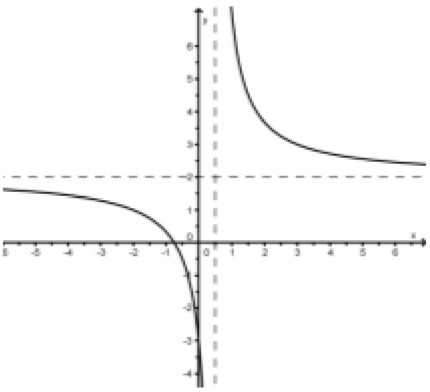
**Cvičení 6: Načrtněte grafy funkcí:**

1. $f: y = \left|\frac{1}{x}\right|$
2. $g: y = \left|\frac{2}{5x-3}\right|$
3. $h: y = \left|\frac{2x+4}{x-2}\right|$

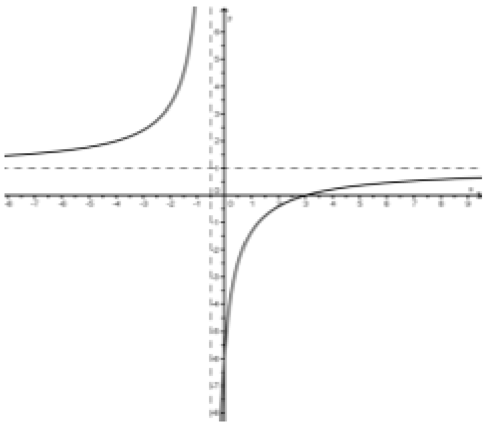




**Cvičení 7: Přiřaďte grafům správný funkční předpis.**

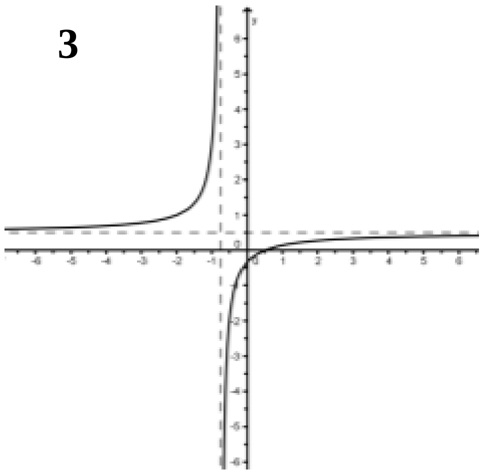
**1**



**2**



**3**



**A.** $y = \frac{2x-6}{2x+1}$ **B.** $y = \frac{2x-1}{4x+3}$ **C.** $y = \frac{4x+3}{2x-1}$

# EXPONENCIAL FUNCTION – worksheet

**Practice 1:** Add correct sign of inequality:

1. $1\square\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

2. $1\square\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

3. $(0,2)^{-\frac{3}{5}}\square(0,2)^{\frac{3}{5}}$

4. $\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\square\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{2}{3}}$

5. $\left(\frac{7}{6}\right)^{3,8}\square\left(\frac{7}{6}\right)^{4,2}$

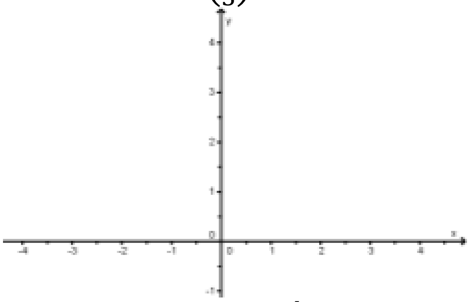
6. $(0,75)^{0}\square(0,32)^{0}$

7. $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\square\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}$

8. $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}}\square\left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{5}{6}}$

**Practice 2:** Sketch graphs of functions and compare $a$ and $b$; $a, b \in R$.

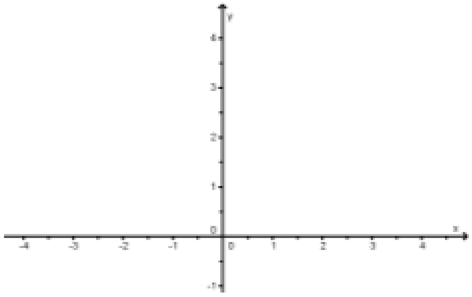
1. $f\colon y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$



$$\left(\frac{2}{3}\right)^{a}>\left(\frac{2}{3}\right)^{b}$$

$$a\square b$$

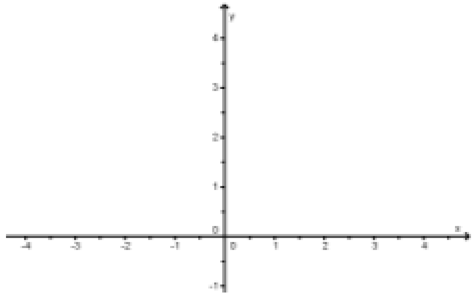
2. $g\colon y=(2,35)^{x}$



$$(2,35)^{a}>(2,35)^{b}$$

$$a\square b$$

3. $h\colon y=(0,2)^{x}$



$$(0,2)^{a}<(0,2)^{b}$$

$$a\square b$$

**Practice 3:** Determine values od parametres *a*, *b*, *c*, *d* so that the function is increasing.

1. $y=(a^{2}-10a+21)^{x}$

2. $y=\left(\frac{b+6}{b-2}\right)^{x}$

3. $y=\left(\frac{1}{c}\right)^{x}$

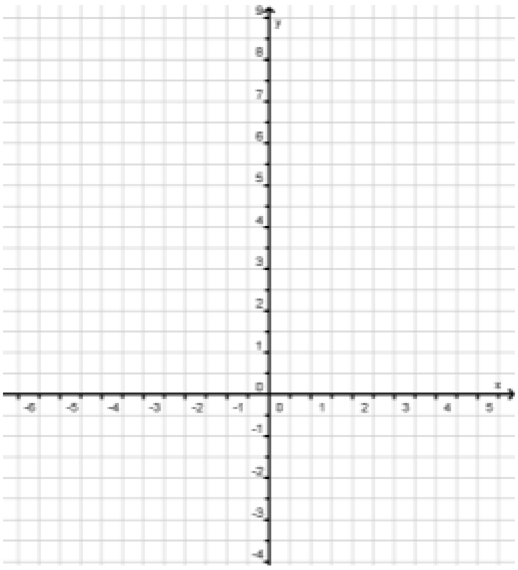
4. $y=\left(\frac{(d-3)(d-6)}{(d^{2}+4)}\right)^{x}$

**Practice 4:** Construct graphs of following functions**:**

$f_1: y = 3^x$

$f_2: y = 3^x + 2$

$f_3: y = 3^{x-1}$



$D_{f_1} =$

$H_{f_1} =$

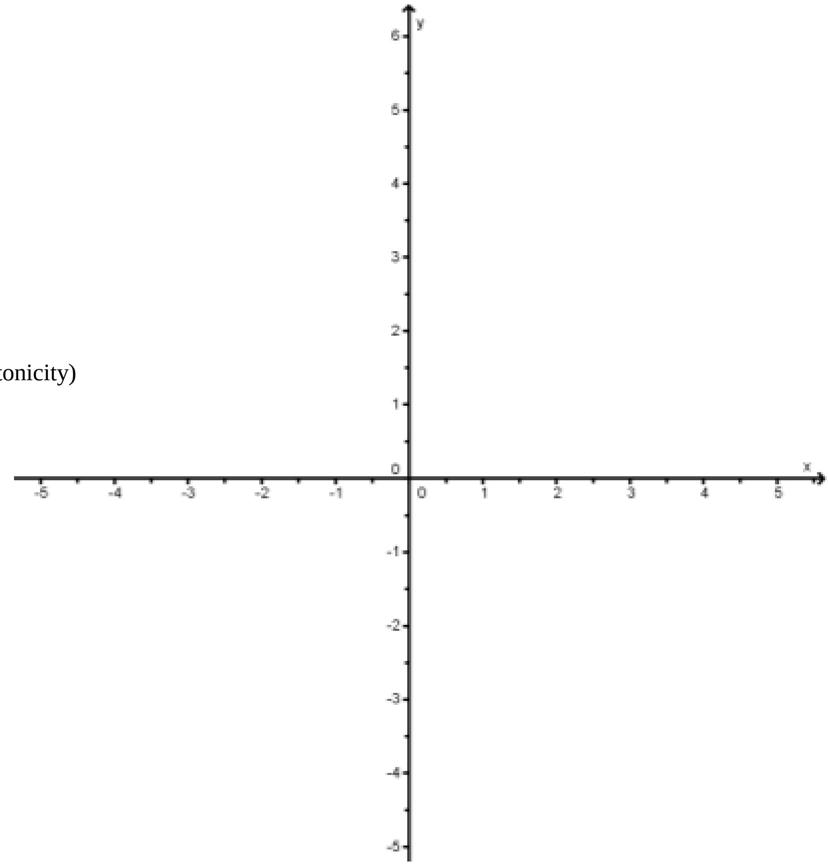
$D_{f_2} =$

$H_{f_2} =$

$D_{f_3} =$

$H_{f_3} =$

**Practice 5:** Construct graph of function $y = 3^{x+2} - 3$. Determine the domain, the range and all properties of this function.



$D_f =$

$H_f =$

**One-to-one**

Function ………one-to-one (is/ isn't)

**Monotonicity**

Function …… ……………………for $x \in$

(increasing, decreasing, monotonicity)

**Bounded**

Function …… bounded (is/ isn't).

**Extremum**

**Even and odd**

# LOGARITHMIC FUNCTION – worksheet

**Practice 1:** Determine domains of functions:

1. $\mathrm{y} = \log x$
2. $\mathrm{y} = \log(x - 23)$
3. $\mathrm{y} = \log|x|$
4. $\mathrm{y} = \log|(x + 3)(2 - x)|$
5. $\mathrm{y} = \log\left(\frac{x-2}{x+5}\right)$
6. $\mathrm{y} = \log\sqrt{x + 3}$
7. $\mathrm{y} = \log(x^2 - 11x + 30)$
8. $y = \log\left(\frac{x(x-5)}{2x+8}\right)$
9. $y = \sqrt{\log(x)}$
10. $y = \frac{x-3}{\log\,(x+5)}$

**Practice 2:** Add correct sign of inequality:

1. $\log_{0,3} 3 \square \log_{0,3} 4$
2. $\log_{0,3} 3 \square \log_{0,4} 3$
3. $\log_5 3 \square \log_3 5$
4. $\log_{\frac{1}{5}} 4 \square \log_{3\frac{1}{5}} 5$
5. $\log_5 5 \square \log_5 8$
6. $\log_{100} 99 \square \log_{98} 99$

**Practice 3:** Compute:

1. $\log_3 3 =$
2. $\log_3 27 =$
3. $\log_5 1 =$
4. $\log_3 3 =$
5. $\log_2 0{,}5 =$
6. $\log 0{,}001 =$
7. $\log_9 \sqrt{3} =$
8. $\log_3 \frac{1}{3} =$
9. $\log_{\frac{1}{7}} 49 =$
10. $\log_3 3^{10} =$
11. $\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5} =$
12. $\log 5 + \log 2 =$
13. $\log_{0,3} 1{,}8 - \log_{0,3} 6 =$
14. $\log_5 25^{\frac{3}{4}} =$

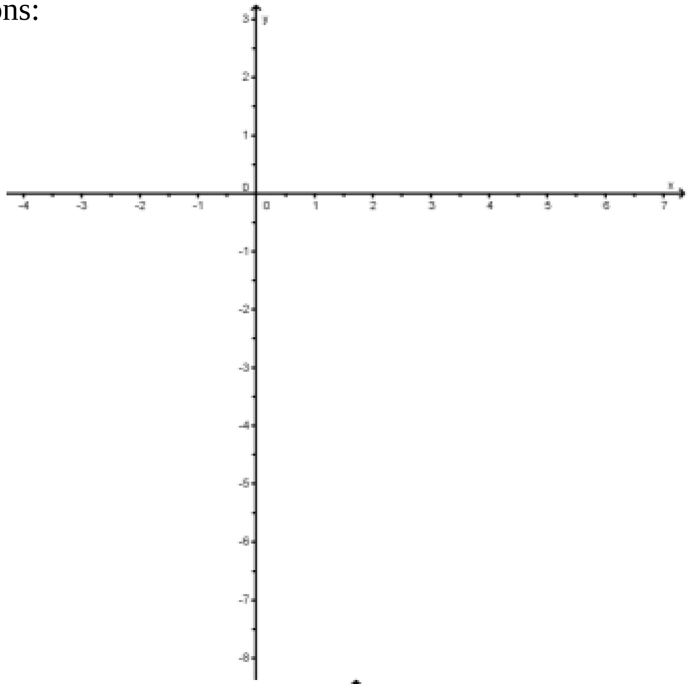
**Practise 4:** Construct graphs of following functions:

$f_1: y = \log_3 x$
$f_2: y = \log_5 x$
$f_3: y = \log_{0,2} x$

$D_{f_1} =$
$H_{f_1} =$

$D_{f_2} =$
$H_{f_2} =$

$D_{f_3} =$
$H_{f_3} =$



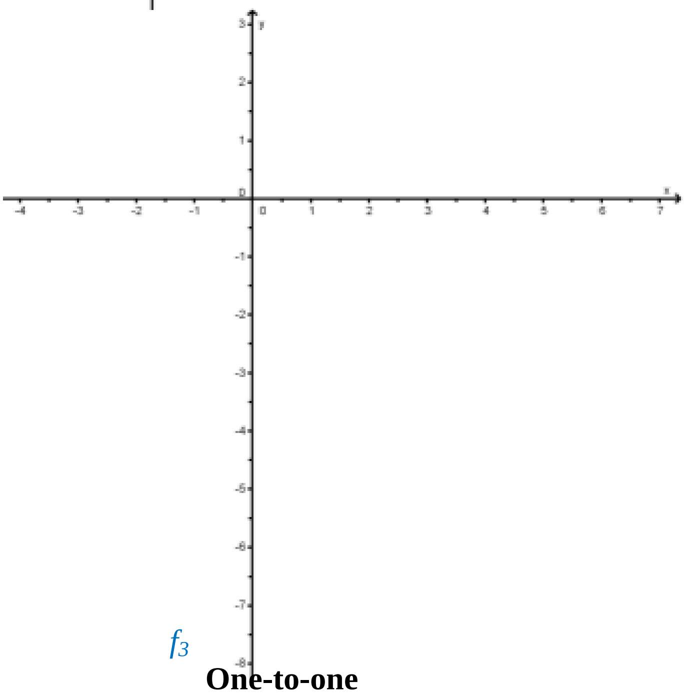
**Practice 5:** Construct graphs of following functions:

$f_1: y = \log_2 x$
$f_2: y = \log_2(x+1)$
$f_3: y = \log_2 x - 3$

$D_{f_1} =$
$H_{f_1} =$

$D_{f_2} =$
$H_{f_2} =$

$D_{f_3} =$
$H_{f_3} =$



*f1*

**One-to-one**
Function .........one-to-one
(is/ isn't)
**Monotonicity**
Function ......
........................for $x \in$
(increasing, decreasing, monotonicity)
**Bounded**
Function ...... bounded (is/ isn't).

**Extremum**

**Even and odd**

*f2*

**One-to-one**
Function .........one-to-one
(is/ isn't)
**Monotonicity**
Function ......
........................for $x \in$
(increasing, decreasing, monotonicity)
**Bounded**
Function ...... bounded (is/ isn't).

**Extremum**

**Even and odd**

*f3*

**One-to-one**
Function .........one-to-one
(is/ isn't)
**Monotonicity**
Function ......
........................for $x \in$
(increasing, decreasing, monotonicity)
**Bounded**
Function ...... bounded (is/ isn't).

**Extremum**

**Even and odd**

# LOGARITMICKÁ FUNKCE – pracovní list

**Cvičení 1:** Určete definiční obor funkcí:

1. $y = \log x$
2. $y = \log(x - 23)$
3. $y = \log|x|$
4. $y = \log|(x+3)(2-x)|$
5. $y = \log\left(\frac{x-2}{x+5}\right)$
6. $y = \log\sqrt{x+3}$
7. $y = \log(x^2 - 11x + 30)$
8. $y = \log\left(\frac{x(x-5)}{2x+8}\right)$
9. $y = \sqrt{\log(x)}$
10. $y = \frac{x-3}{\log(x+5)}$

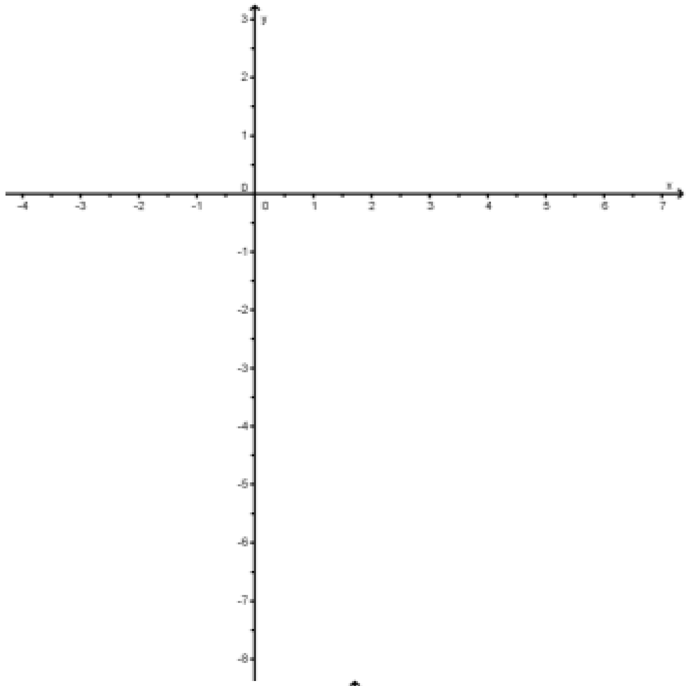
**Cvičení 2:** Doplňte správný znak nerovnosti:

1. $\log_{0,3} 3 \square \log_{0,3} 4$
2. $\log_{0,3} 3 \square \log_{0,4} 3$
3. $\log_5 3 \square \log_3 5$
4. $\log_{\frac{1}{5}} 4 \square \log_{3\frac{1}{5}} 5$
5. $\log_5 5 \square \log_5 8$
6. $\log_{100} 99 \square \log_{98} 99$

**Cvičení 3:** Vypočítejte:

1. $\log_3 3 =$
2. $\log_3 27 =$
3. $\log_5 1 =$
4. $\log_3 3 =$
5. $\log_2 0{,}5 =$
6. $\log 0{,}001 =$
7. $\log_9 \sqrt{3} =$
8. $\log_3 \frac{1}{3} =$
9. $\log_{\frac{1}{7}} 49 =$
10. $\log_3 3^{10} =$
11. $\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5} =$
12. $\log 5 + \log 2 =$
13. $\log_{0,3} 1{,}8 - \log_{0,3} 6 =$
14. $\log_5 25^{\frac{3}{4}} =$

**Cvičení 4:** Sestrojte grafy následujících funkcí:



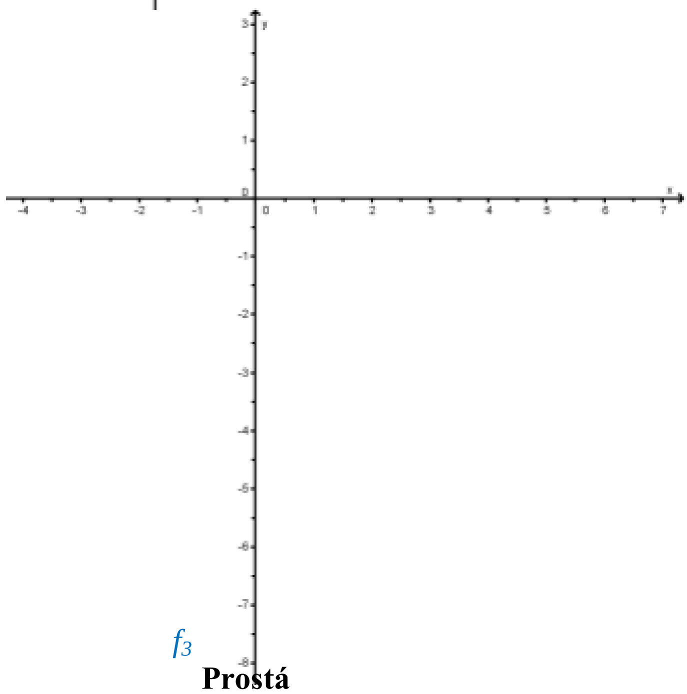
$f_1 : y = \log_3 x$
$f_2 : y = \log_5 x$
$f_3 : y = \log_{0,2} x$

$D_{f_1} =$
$H_{f_1} =$

$D_{f_2} =$
$H_{f_2} =$

$D_{f_3} =$
$H_{f_3} =$

**Cvičení 5:** Sestrojte grafy následujících funkcí:



$f_1 : y = \log_2 x$
$f_2 : y = \log_2(x+1)$
$f_3 : y = \log_2 x - 3$

$D_{f_1} =$
$H_{f_1} =$

$D_{f_2} =$
$H_{f_2} =$

$D_{f_3} =$
$H_{f_3} =$

*$f_1$*

**Prostá**
Funkce ………prostá
(je/není)
**Monotónnost**
Funkce ……
……………..………pro $x \in$
(rostoucí, klecající, monotónní)
**Omezenost**
Funkce …… omezená (je/není).

**Extrém**

**Parita**

*$f_2$*

**Prostá**
Funkce ………prostá
(je/není)
**Monotónnost**
Funkce ……
……………..………pro $x \in$
(rostoucí, klecající, monotónní)
**Omezenost**
Funkce …… omezená (je/není).

**Extrém**

**Parita**

*$f_3$*

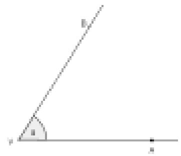
**Prostá**
Funkce ………prostá
(je/není)
**Monotónnost**
Funkce ……
……………..………pro $x \in$
(rostoucí, klecající, monotónní)
**Omezenost**
Funkce …… omezená (je/není).

**Extrém**

**Parita**

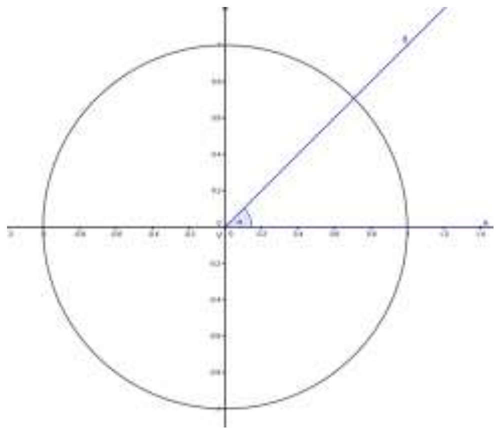
# TRIGONOMETRIC FUNCTION – SINE, COSINE

To establish and define functions sine and cosine of any angle we must first begin with the unit circle.
The unit circle is a circle with a radius of one unit.
To determine the value of sine and cosine of a specific angle α we must start the unit circle.
So now contruct an arbtraryoriented angle $\sphericalangle AVB$ of the size α, $|\sphericalangle AVB| = \alpha$

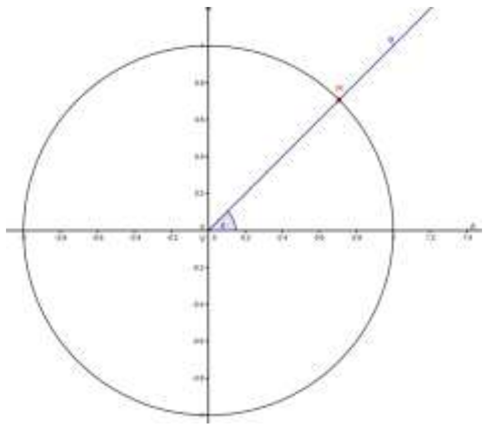


**Picture 1**

Place this angle in the unit circle and the coordinate system so that the initial arm AV is similar to the positive part of x axes. There is only one such location (Picture 2).



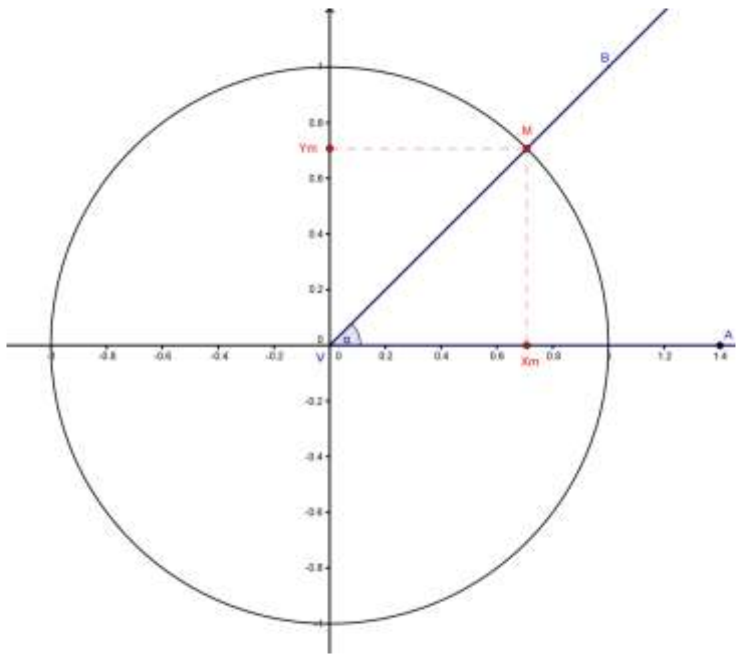
**Picture 2**



**Picture 3**

Trailing arm VB of the angle $\sphericalangle AVB$ intersects the circle at a single point.
This intersection‘s name is M.
This can be seen in the Picture 3.

We can unambiguously assign the coordinates of the point M: $M[x_m; y_m]$

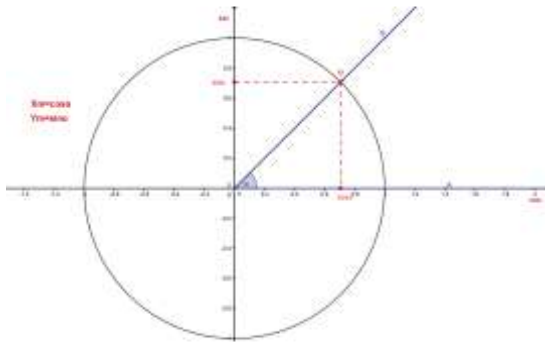



**Picture 4**

Determining the values of sine and cosine of our angle α is nothing more than determining these M point coordinates.

The second coordinate of the point M is called **sine α** and its first coordinate is called the **cosine α**, they are denoted $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ **.**

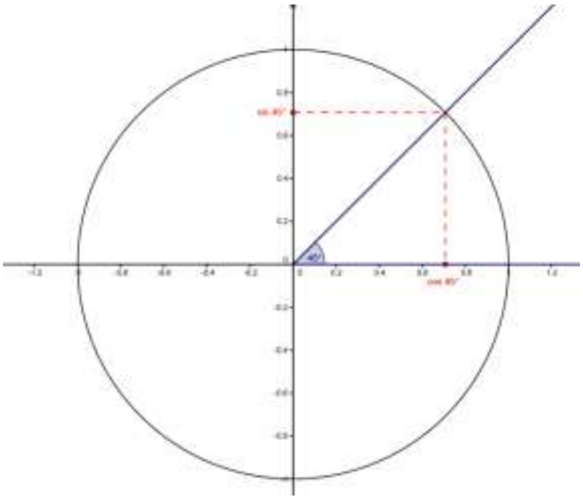
$$\sin\alpha = y_M \qquad \cos\alpha = x_M$$
, for every $\alpha \in R$.



**SINE**
The sine function on the set R is called the function in which each number $\alpha \in R$ is assigned number $x_M$ .
**COSINE**
The cosine function on the set R is called the function in which each number $\alpha \in R$ is assigned number $y_M$ .

Similary (as described above for general angle α) we can use the unit circle to determine the value of the sine and cosine functions for any given oriented angle.
We always calculate the **basic angle** and then place this angle into the unit circle.
We will show some particular examples below.

$\boldsymbol{\alpha = 45°}$



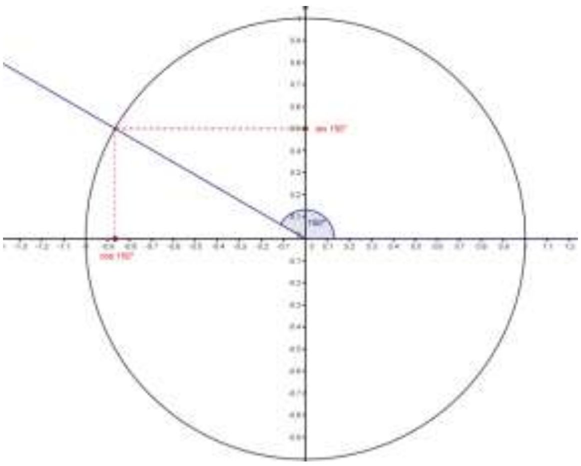
Picture 5

Using the unit circle, we have determined following values:
$\sin 45° \doteq 0{,}71$
$\cos 45° \doteq 0{,}71$

Exactly:

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boldsymbol{\alpha = 150°}$



Picture 6

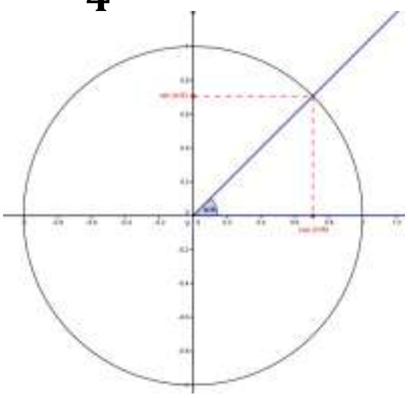
Using the unit circle, we have determined following values:
$\sin 150° \doteq 0{,}5$
$cos 150° \doteq -0{,}87$

Exactly:

$$\sin 150° = \frac{1}{2}$$
$$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Of course, we can determine the values of sine and cosine for angles whose size is given in arc degree.

$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

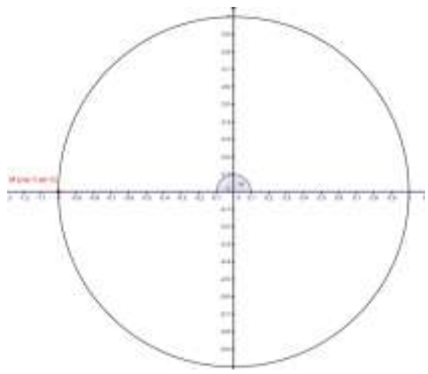


$$sin\frac{\pi}{4} \doteq 0{,}71$$
$$cos\frac{\pi}{4} \doteq 0{,}71$$

Exactly:

$$sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

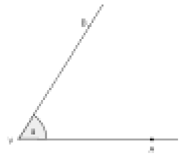
$\boldsymbol{\alpha = \pi}$



$$\sin \pi = 0$$
$$\cos \pi = -1$$

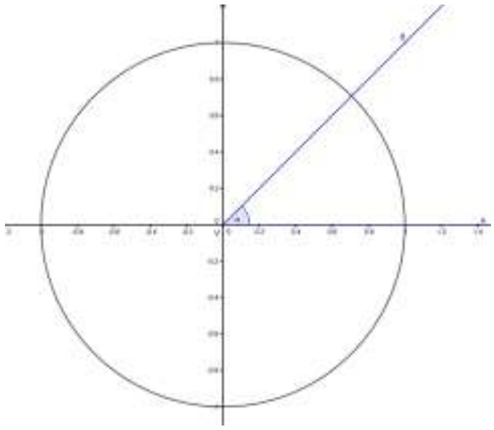
# TRIGONOMETRICKÉ FUNKCE – SINUS A KOSINUS

K zavedení a definování funkcí sinus a kosinus pro libovolný úhel si nejprve zvolíme jednotkovou kružnici. Tedy kružnici o poloměru 1 jednotka.
Pomocí této jednotkové kružnice určíme hodnoty funkce sinus a kosinus konkrétního úhlu.
Sestrojme si tedy libovolný orientovaný úhel $\sphericalangle AVB$ o velikosti α, $|\sphericalangle AVB| = \alpha$

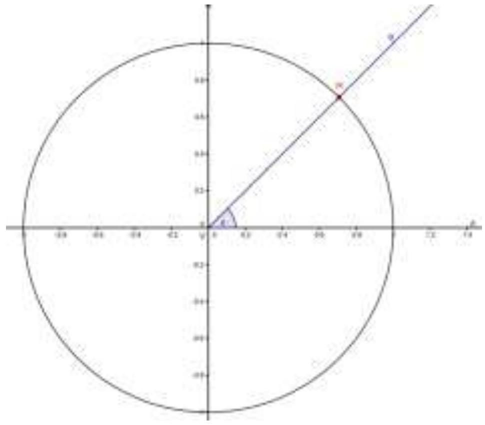


**Obrázek 7**

Tento úhel umístěme do jednotkové kružnice a soustavy souřadnic tak, že počáteční rameno AV bude kladná poloosa x v soustavě souřadnic. Existuje jen jedno takové umístění (Picture 2).



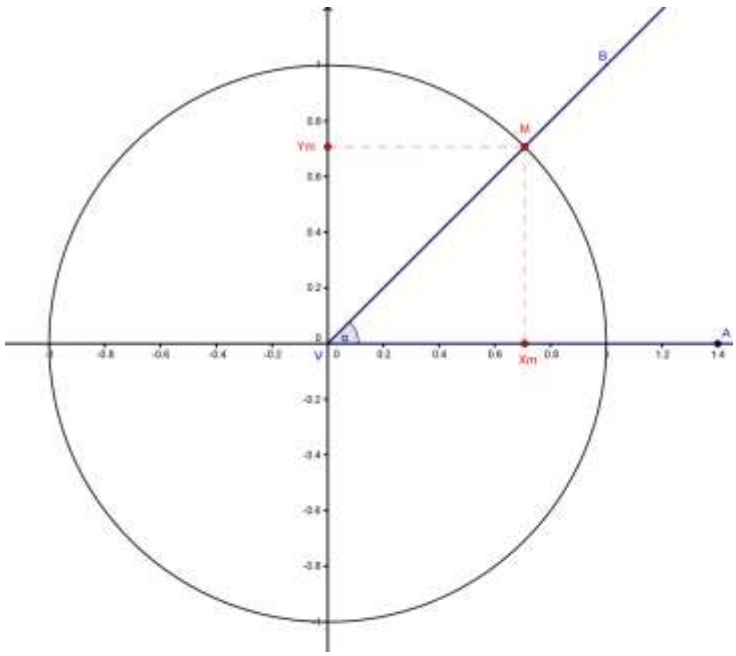
**Obrázek 8**



**Obrázek 9**

Koncové rameno VB úhlu $\sphericalangle AVB$ protne kružnici v jediném bodě.
Tento průsečík označme M.
Toto můžete vidět na Picture 3.

Bodu M můžeme jednoznačně přiřadit jeho souřadnice $M[x_m; y_m]$

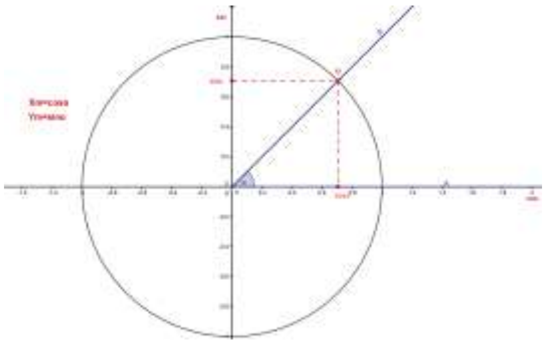


**Obrázek 10**

Určení hodnoty funkce sinus a kosinus našeho úhlu α není nic jiného než určení těchto souřadnic bodu M.

Druhou souřadnici bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu $\sphericalangle AVB$ nazýváme **sinus α** a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus α**, značíme je $\sin\alpha,\ \cos\alpha$ .

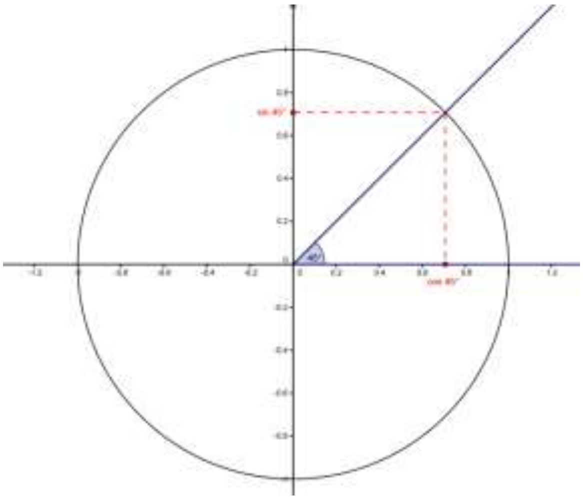
$$\sin\alpha = y_M$$
$$\cos\alpha = x_M$$
, pro každé $\alpha \in R$.



**SINUS**
Funkcí sinus se nazývá funkce na množině R, kterou je každému číslu $\alpha \in R$ přiřazeno číslo $x_M$ .
**KOSINUS**
Funkcí kosinus se nazývá funkce na množině R, kterou je každému číslu $\alpha \in R$ přiřazeno číslo $y_M$ .

Stejným způsobem, který jsme popsali výše pro nějaký obecný úhel α, můžeme pomocí jednotkové kružnice určit hodnotu funkce sinus a kosinus pro libovolný konkrétní orientovaný úhel.
Vždy určíme **základní velikost** úhlu a tento úhel umístíme do jednotkové kružnice.
Níže uvedeme několik konkrétních příkladů.

$$\boldsymbol{\alpha = 45°}$$



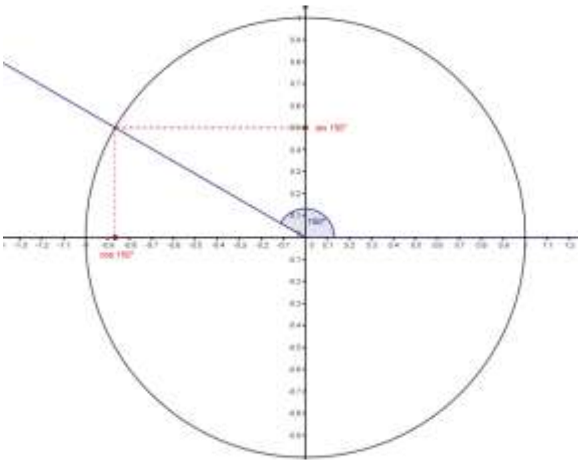
Obrázek 11

Pomocí jednotkové kružnice jsme určili následující hodnoty.
$\sin 45° \doteq 0{,}71$
$\cos 45° \doteq 0{,}71$

Přesně:

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 150°}$$



Obrázek 12

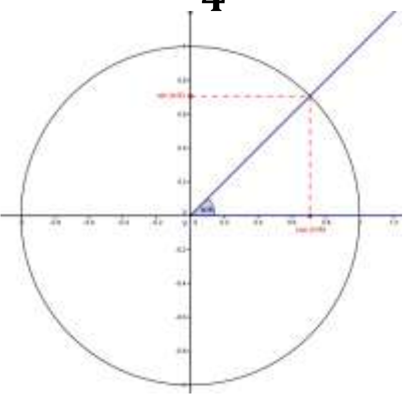
Pomocí jednotkové kružnice jsme určili následující hodnoty:
$\sin 150° \doteq 0{,}5$
$cos 150° \doteq -0{,}87$

Přesně:

$$\sin 150° = \frac{1}{2}$$
$$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Samozřejmě můžeme určit hodnoty funkce sinus a kosinus i pro úhly, které mají velikost dánu v obloukové míře.

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

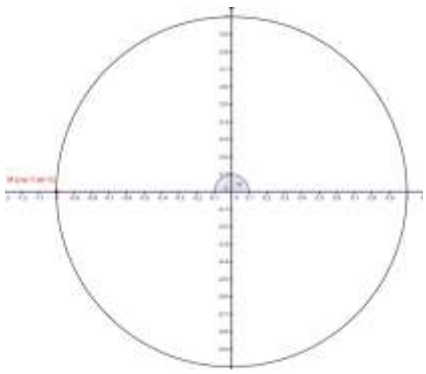


$$sin\frac{\pi}{4} \doteq 0{,}71$$
$$cos\frac{\pi}{4} \doteq 0{,}71$$

*Přesně:*

$$sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \pi}$$



$\sin\pi = 0$
$\cos\pi = -1$

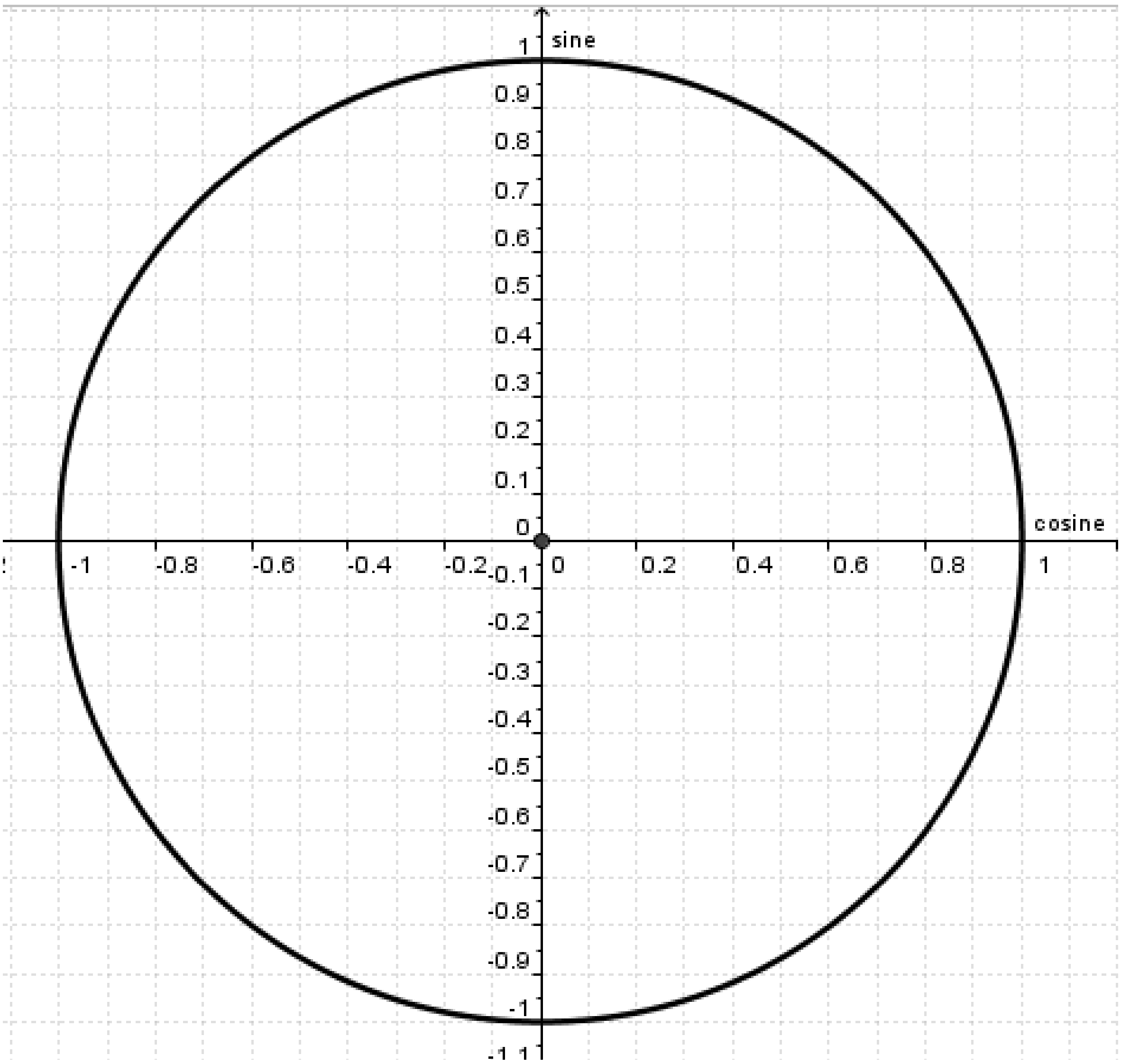
# WORKSHEET – graph of SINE AND COSINE

**1.** Study the text devoted to the determining of the values of the functions sine and cosine.

**a)** Complete the second line in the table. Convert the size of the angles given in degree arc to the degrese.
**b)** Mark the angles listed in the table to the unit circle.
**c)** Use the unit circle and fill the remaining lines in the table.
Determine the value of the sine and the cosine function.

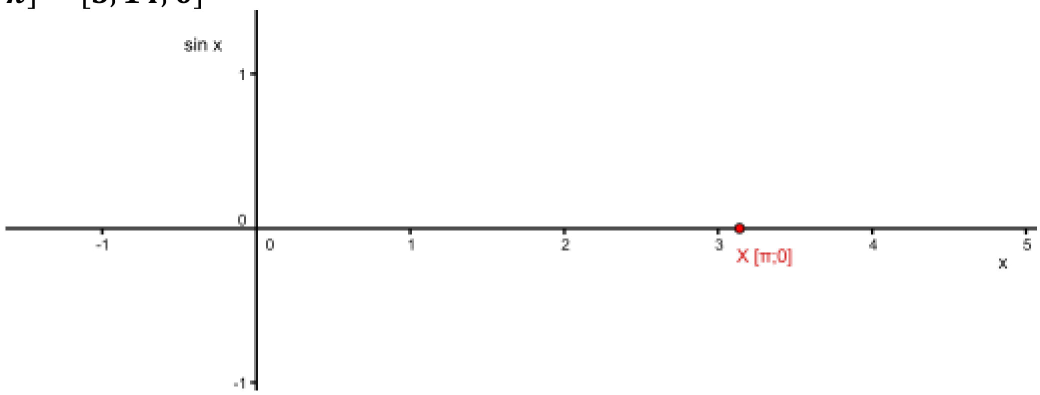
| **x** | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0° | 30° | | | | | | | | | | | | | | | |
| **$\sin x$** | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **$\cos x$** | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Unit circle**



**2.** Use data in the table and construct a graph of sine (cosine) in the Cartesian coordinate system.
Apply the values of the angle (in radians) to the x-axis.
Appropriate value of the sine function is always applied to the axis y.

*Example:* On the graph of the sine function there is a point X with coordinates.
$\boldsymbol{X}[\boldsymbol{\pi}; \sin \boldsymbol{\pi}] = [\mathbf{3,14}; \mathbf{0}]$

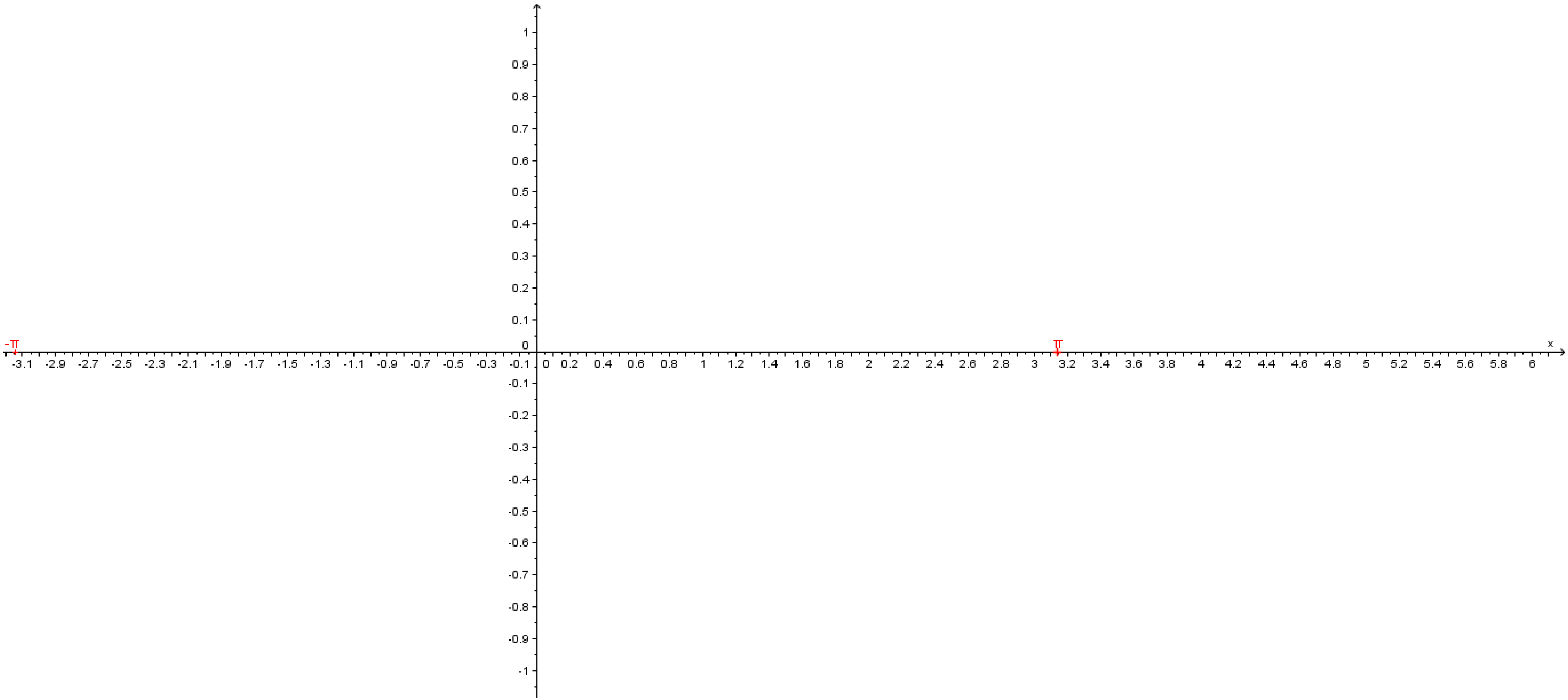



**3.** Add values in the table below. Use these values in your cunstruction of the graph of sine.
You need always specify the basic angle while determining these values.

| **x** | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | $-\frac{3}{4}\pi$ | $-\frac{5}{6}\pi$ | $-\pi$ | $\frac{12}{6}\pi$ | $\frac{9}{4}\pi$ | $\frac{7}{3}\pi$ | $\frac{5}{2}\pi$ | $\frac{8}{3}\pi$ | $\frac{11}{4}\pi$ | $\frac{17}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | -90° | | | | -180° | | | | | | | | 360° |
| **basic angle** | | | | $\frac{3}{2}\pi$ | | | | $\pi$ | | | | | | | | 0 |
| $\sin x$ | | | | -1 | | | | | | | | | | | | 0 |
| $\cos x$ | | | | 0 | | | | | | | | | | | | 1 |

**4.** Construct the graph of the sine (cosine) function.
You can use the Cartesian coordinate system in the attached file.

**Graph:**



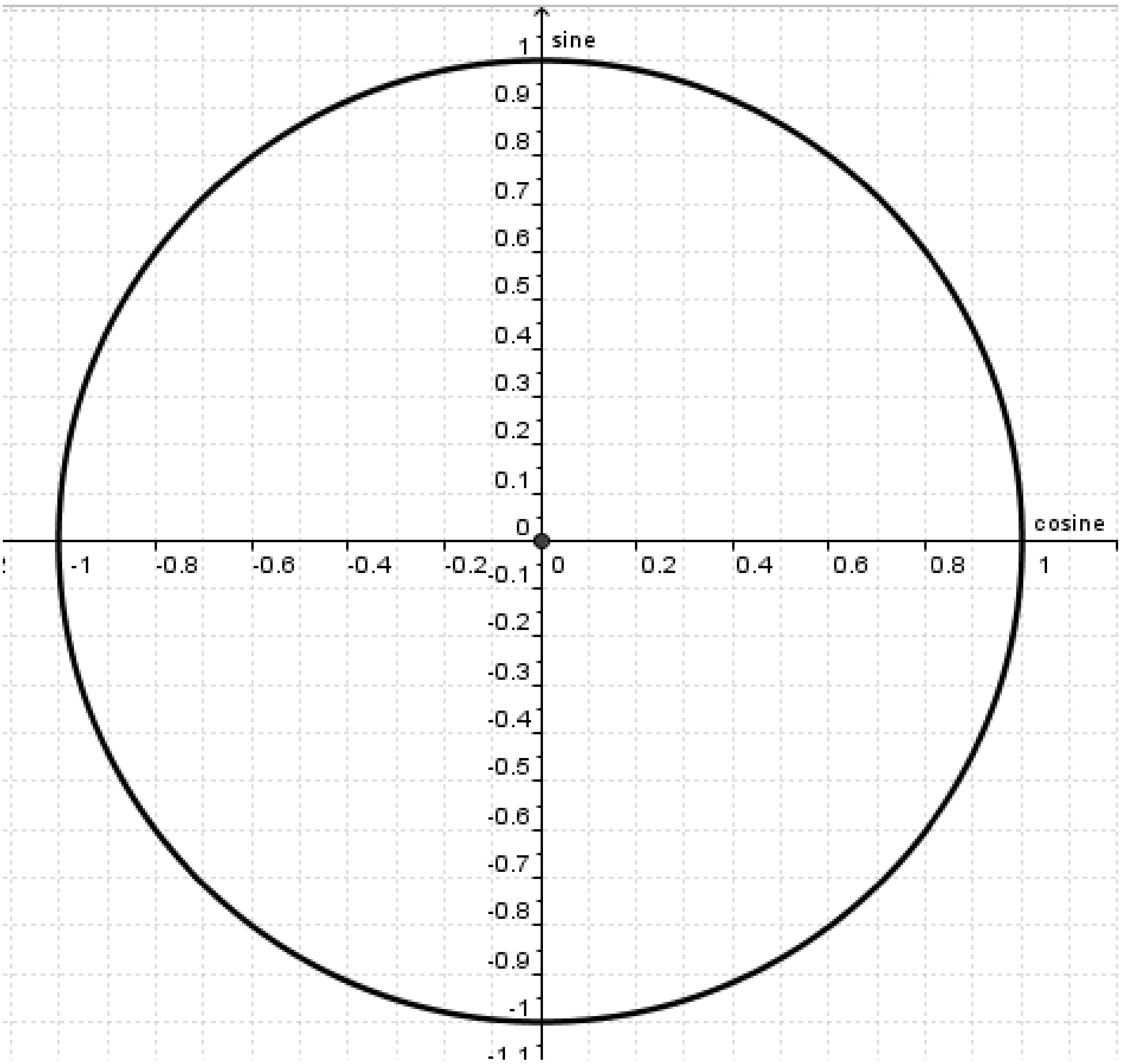
# PRACOVNÍ LIST – GRAF SINU A KOSINU

**1.** Prostudujte text věnovaný určování hodnot funkcí sinus a kosinus.

- **a)** Doplňte druhý řádek tabulky. Převěďte obloukovou míru úhlu na míru stupňovou.
- **b)** Vyznačte úhly zapsané v tabulce na jednotkové kružnici.
- **c)** S využitím jednotkové kružnice doplňte zbylé řádky tabulky.
  Určete hodnoty funkcí sinus a cosinus.

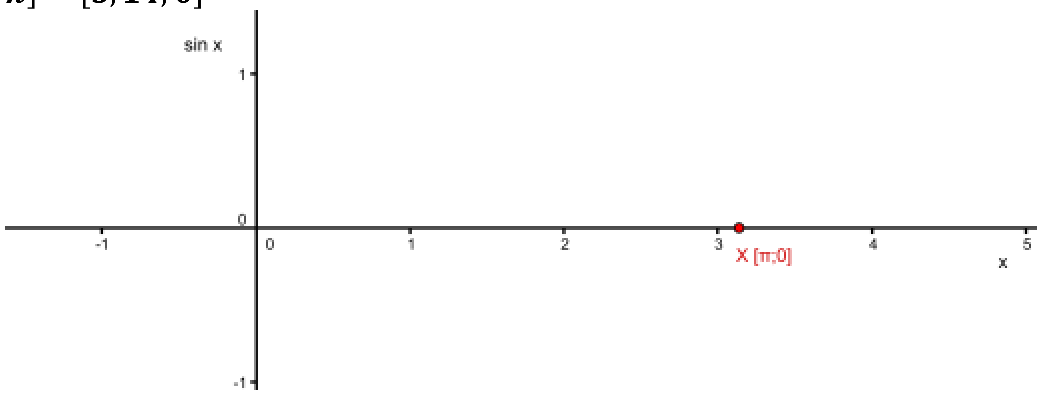
| x | $\mathbf{0}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0° | 30° | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\sin x$ | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\cos x$ | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |

**<u>Jednotková kružnice</u>**



**2.** Využijte hodnoty z tabulky a sestrojte graf sinu (kosinu) v Kartézské soustavě souřadnic.
Hodnoty úhlu v obloukové míře vyznačte na osu *x*.
Zaokrouhlené hodnoty funkcí sinus a kosinus vždy znázorněte na osu *y*.

*Příklad:* Na grafu funkce sinus je vyznačen bod X o souřadnicích
$\boldsymbol{X[\pi; \sin\pi] = [3,14; 0]}$

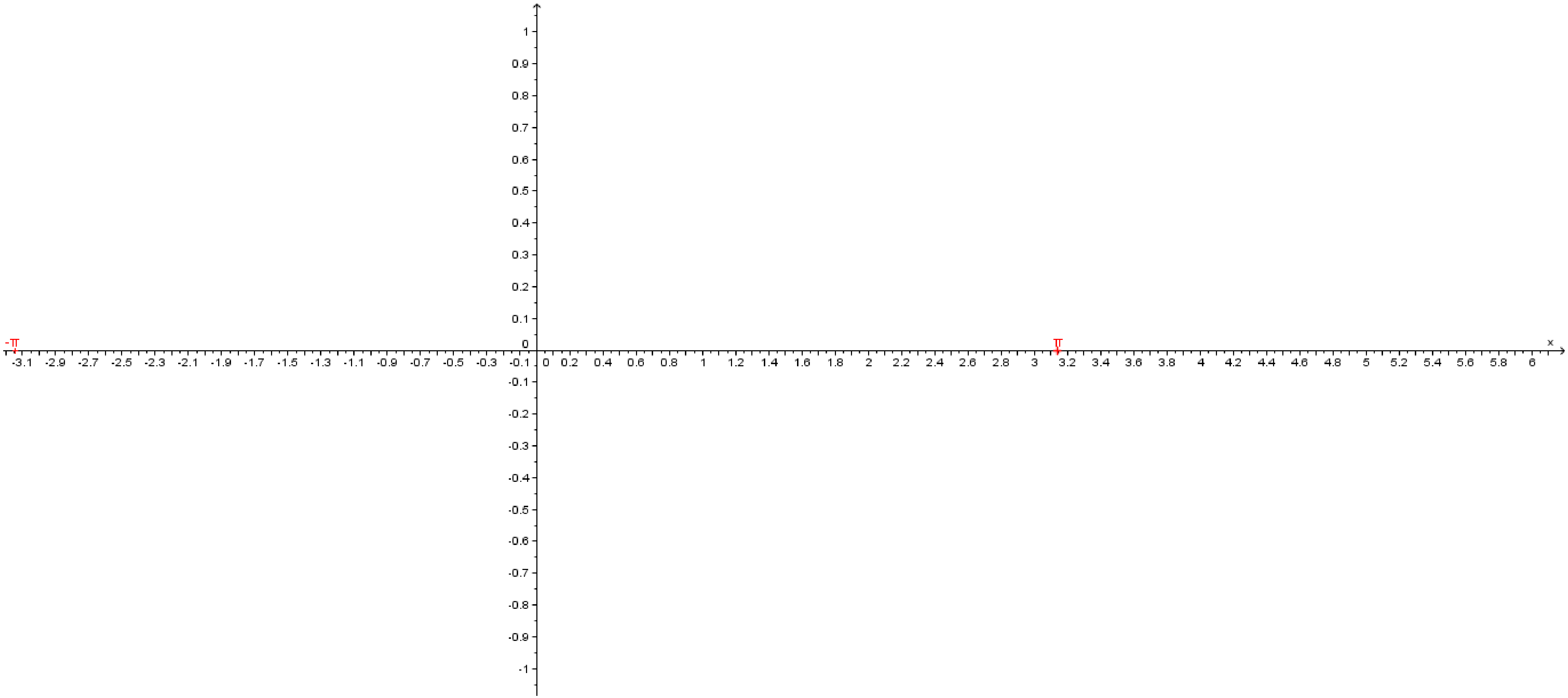



**3.** Doplňte hodnoty do tabulky níže. Tyto hodnoty využijte při konstrukci grafu funkce sinu.
Při určování těchto hodnot vždy určete základní velikost úhlu.

| **x** | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | $-\frac{3}{4}\pi$ | $-\frac{5}{6}\pi$ | $-\pi$ | $\frac{12}{6}\pi$ | $\frac{9}{4}\pi$ | $\frac{7}{3}\pi$ | $\frac{5}{2}\pi$ | $\frac{8}{3}\pi$ | $\frac{11}{4}\pi$ | $\frac{17}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | -90° | | | | -180° | | | | | | | | 360° |
| **zákl. velikost** | | | | $\frac{3}{2}\pi$ | | | | $\pi$ | | | | | | | | 0 |
| $\boldsymbol{\sin x}$ | | | | -1 | | | | | | | | | | | | 0 |
| $\boldsymbol{\cos x}$ | | | | 0 | | | | | | | | | | | | 1 |

**4.** Sestrojte graf funkce sinus (kosinus).
Využijte soustavu souřadnic z přiloženého souboru.

**Graf:**



# ABSOLUTE VALUE

In this worksheet you will learn a new term. It is an absolute value. You will also try to give a definition of this term. In the next worksheet you will learn how to work with an absolute value function.

**Geometrical interpretation of absolute value**

Before making a definition of the absolute value we will first try to explain the meaning of absolute value on the numerical axis.


1. **1.** Mark following numbers on the numerical axis.
   1; -1; 4; -4; 7; -7; 5,5;-5,5
2. **2.** Comlete these statements.
   - **a)** The distance of number 1 from the coordinate origin is/are …… unit/units.
   - **b)** The distance of number -1 from the coordinate origin is/are …… unit/units.
   - **c)** The distance of number 4 from the coordinate origin is/are …… unit/units.
   - **d)** The distance of number -4 from the coordinate origin is/are …… unit/units.
   - **e)** The distance of number 7 from the coordinate origin is/are …… unit/units.
   - **f)** The distance of number -7 from the coordinate origin is/are …… unit/units.
   - **g)** The distance of number 5,5 from the coordinate origin is/are …… unit/units.
   - **h)** The distance of number-5,5 from the coordinate origin is/are …… unit/units.

The bsolute value of a real number is connected with the distance of this real number from zero.

**THE ABSOLUTE VALUE OF EVERY REAL NUMBER IS EQUAL TO THE DISTANCE BETWEEN THIS NUMBER AND THE COORDINATE ORIGIN ON THE NUMERICAL AXIS.**

A symbol $|a|$ is used for annotation of the absolute value.

We can write findings from example 2 with using following equations (complete all empty spaces):

| | | |
|---|---|---|
| **a)** $|1| = 1$ | **d)** $|-4| =$ | **g)** $|5,5| =$ |
| **b)** $|-1| = 1$ | **e)** $|7| =$ | **h)** $|-5,5| =$ |
| **c)** $|4| = 4$ | **f)** $|-7| =$ | |

Now try to complete a definition of the absolute value:

**THE DEFINITION OF THE ABSOLUTE VALUE $|a|$ OF A REAL NUMBER *a* IS:**

**IF $a \geq 0$, THEN $|a| =$……,**

**IF $a < 0$, THEN $|a| =$…… .**

The absolute value of the non-negative number *a* is equal to …. , the absolute value of the negative number *a* is egual to a opposite number which is written ……..

So for every real number we can notice: $\boxed{|a| \quad 0}$

(fill in the gap with the right sign of inequality)

**3.** Calculate:

**a)** $\left|-105\right| =$

**b)** $\left|-15-(-3)\right| =$

**c)** $\left|2-9\right| =$

**d)** $\left|7-\left|5-8\right|\right| =$

**e)** $\left|2-\sqrt{2}\right| =$

**f)** $\left|1-\sqrt{2}\right| =$

**4.** Mark on the numerical axis all numbers which are the solutions of these equations.

**a)** $|x| = 5$ ________________________________________

**b)** $|x| > 5$ ________________________________________

**c)** $|x| \leq 3$ ________________________________________

**d)** $|x| \geq 2$ ________________________________________

**5.** Calculate:

**a)** $|1-3| =$
$|3-1| =$

**b)** $|4-6| =$
$|6-4| =$

**c)** $|7-3| =$
$|3-7| =$

Look at the previous exercise once more!
Each pair of equations have the same solutions. Is it possible that also these types of absolute value have some geometrical interpretation?

Mark numbers 1 and 3 on the numerical axis:

---

Mark numbers 3 and 7 on the numerical axis:

---

What is the geometrical interpretation of the absolute value of the difference between numbers 1 and 3? ($|1-3|$)?

……………………………………………………………………………………………(Write your idea.)

**THE DISTANCE BETWEEN REAL NUMBERS *a, b* ON THE NUMERICAL AXIS IS EQUAL TO …………. ,**
**or ………….**

**6.** Mark on the numerical axis all numbers which are the solutions of these equations:

**a)** $|x-1| = 2$

**b)** $|x-6| = 1$

**c)** $|x-4| \leq 1$

**d)** $|x-4| > 1$

**e)** $|x+1| = 5$

# ABSOLUTNÍ HODNOTA

V tomto pracovním listu se seznámíme s dalším novým matematickým pojmem.Tímto pojmem je absolutní hodnota. Sami si zkusíte vyslovit i definici absolutní hodnoty.

**Geometrická interpretace absolutní hodnoty:**
Před vyslovením definice si nejprve zkusíme vysvětlit význam absolutní hodnoty na číselné ose.


**1.** Na danou číselnou osu znázorněte obrazy následujících čísel:
1; -1; 4; -4; 7; -7; 5,5;-5,5

**2.** Doplňte na vynechaná místa správné údaje:
- **a)** Vzdálenost obrazu čísla 1 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.
- **b)** Vzdálenost obrazu čísla -1 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.
- **c)** Vzdálenost obrazu čísla 4 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.
- **d)** Vzdálenost obrazu čísla -4 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.
- **e)** Vzdálenost obrazu čísla 7 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.
- **f)** Vzdálenost obrazu čísla -7 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.
- **g)** Vzdálenost obrazu čísla 5,5 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.
- **h)** Vzdálenost obrazu čísla -5,5 od počátku je/jsou …… jednotek/jednotky.

Absolutní hodnota reálného čísla souvisí se vzdáleností jeho obrazu od počátku na číselné ose.

**ABSOLUTNÍ HODNOTA KAŽDÉHO REÁLNÉHO ČÍSLA JE ROVNA VZDÁLENOSTI OBRAZU TOHOTO ČÍSLA OD POČÁTKU NA ČÍSELNÉ OSE.**

Absolutní hodnotu reálného čísla *a* značíme $|a|$.
Závěry ze cvičení 2 tedy můžeme zapsat (doplňte správné hodnoty na vynechaná místa):

| | | |
|---|---|---|
| **a)** $\lvert 1\rvert = 1$ | **d)** $\lvert -4\rvert =$ | **g)** $\lvert 5,5\rvert =$ |
| **b)** $\lvert -1\rvert = 1$ | **e)** $\lvert 7\rvert =$ | **h)** $\lvert -5,5\rvert =$ |
| **c)** $\lvert 4\rvert = 4$ | **f)** $\lvert -7\rvert =$ | |

Pokuste se nyní doplnit a vyslovit definici absolutní hodnoty.

**ABSOLUTNÍ HODNOTU $|a|$ REÁLNÉHO ČÍSLAO *a* DEFINUJEME TAKTO:**

**JE-LI $a \geq 0$, PAK $|a| =$……,**

**JE-LI $a < 0$, PAK $|a| =$…… .**

Absolutní hodnota nezáporného čísla *a* je tedy rovna číslu …. , absolutní hodnota záporného čísla *a* je rovna ……………………… číslu, které zapíšeme………………..

Pro každé reálné číslo *a* tedy platí: $\boxed{|a| \quad 0}$

(doplňte správně znak nerovnosti

**3.** Vypočítejte:

**a)** $|-105| =$

**b)** $|-15-(-3)| =$

**c)** $|2-9| =$

**d)** $|7-|5-8|| =$

**e)** $|2-\sqrt{2}| =$

**f)** $|1-\sqrt{2}| =$

**4.** Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla, pro něž platí:.

**a)** $|x| = 5$ ________________________________________

**b)** $|x| > 5$ ________________________________________

**c)** $|x| \leq 3$ ________________________________________

**d)** $|x| \geq 2$ ________________________________________

**5.** Vypočítejte:

**a)** $|1-3| =$
$|3-1| =$

**b)** $|4-6| =$
$|6-4| =$

**c)** $|7-3| =$
$|3-7| =$

Pořádně se na předchozí příklad ještě jednou podívejte!
Vždy ve dvojicích příkladů vychází stejné výsledky! Nebude mít i tento zápis s absolutní hodnotou nějaký geometrický význam?

Znázorněte na číselnou osu obraz čísla 1 a obraz čísla 3. 3:

Znázorněte na číselnou osu obraz čísla 4 a obraz čísla 6:

Jaký má podle vás geometrický význam absolutní hodnota rozdílu čísel 1 a 3? ($|1-3|$)?
…………………………………………………………………………(Zapište svoji myšlenku.)

**VZDÁLENOST OBRAZŮ REÁLNÝCH ČÍSEL *a, b* NA ČÍSELNÉ OSE JE ROVNA …………. , resp. ………..….**

**6.** Na číselné ose znázorněte obrazy všech reálných čísel, pro která platí:

**f)** $|x-1| = 2$

**g)** $|x-6| = 1$

**j)** $|x+1| = 5$

**h)** $|x-4| \leq 1$

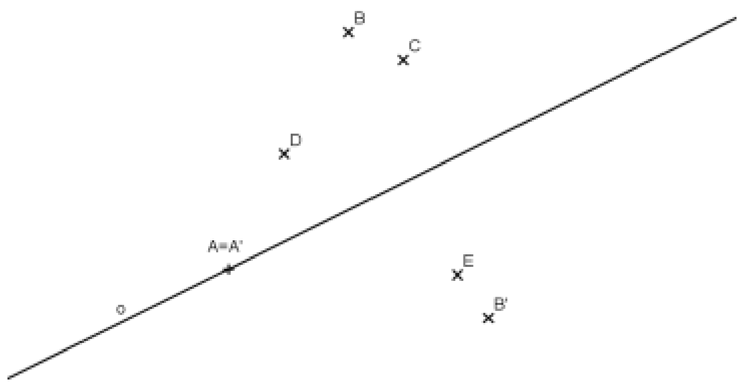
**i)** $|x-4| > 1$

# AXIAL SYMMETRY

**There is a line *o*.**
**AXIAL SYMMETRY is an identical mapping *O(o)* which assigns:**
**1. each point $X \notin o$ to point X‘ so that the line *o* is the axis of the segment XX‘.**
**2. each point $Y \in o$ to point $Y' = Y$.**

- The line *o* is called the axis of symmetry.

**1.** Find and construct images of points C,D,E in axial symmetry $O(o)$.




**2.** Find and construct the image of lines *a* and *b* in axial symmetry $O(o)$.

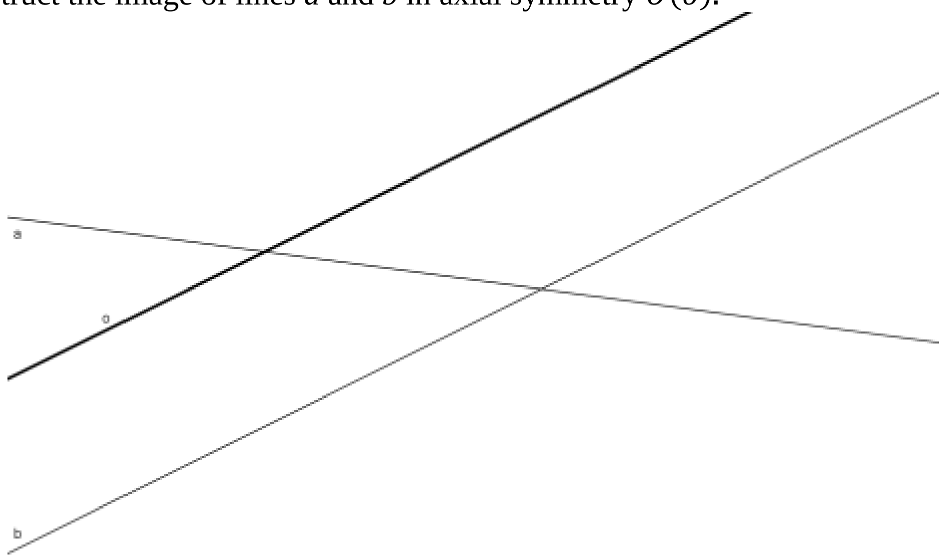


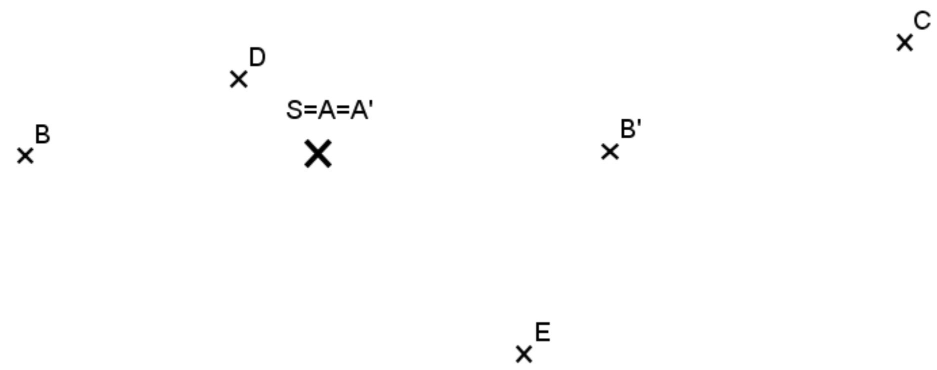

**Image of line *a*, which is not parallel to the axis of symmetry, is a straight line *a‘* which ………………………………………………………………………………………………………**
**Image of line *b*, which is parallel to the axis of symmetry, is a straight line *b‘* which ………………………………………………………………………………………………………**
**Axial symmetry ……….. (has/doesn´t have) self-conjugate points.**
**Lines, that ………………………………………………………. are self-conjugate.**

# CENTRAL SYMMETRY

**There is a point $S$.**
**CENTRAL SYMMETRY is an identical mapping *S(S)* which assigns:**
**1. each point $X \neq S$ to point X‘ so that the line $S$ is the the center of the segment XX‘.**
**2. each point $Y = S$ to point $Y' = Y$.**

- The point S is called the center symmetry.

**1.** Find and construct images of points C,D,E in central symmetry $S(S)$.




**2.** Find and construct the image of lines *a* and *b* in in central symmetry $S(S)$.

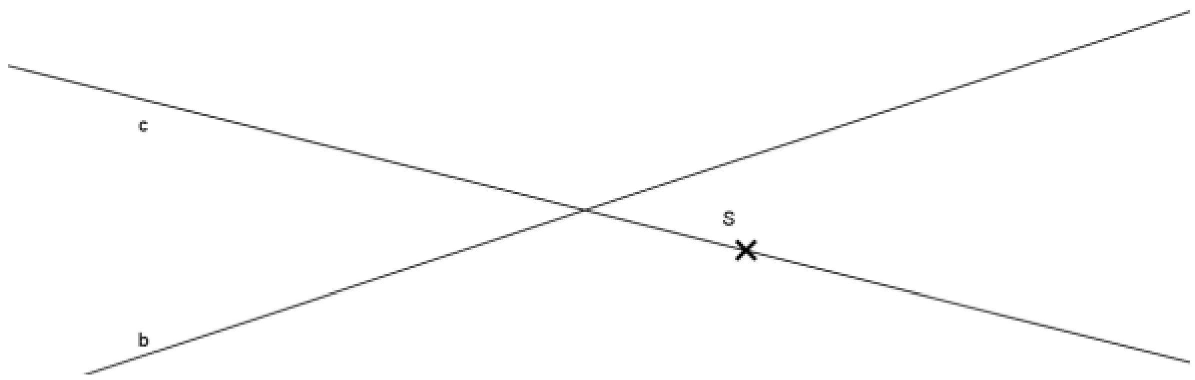


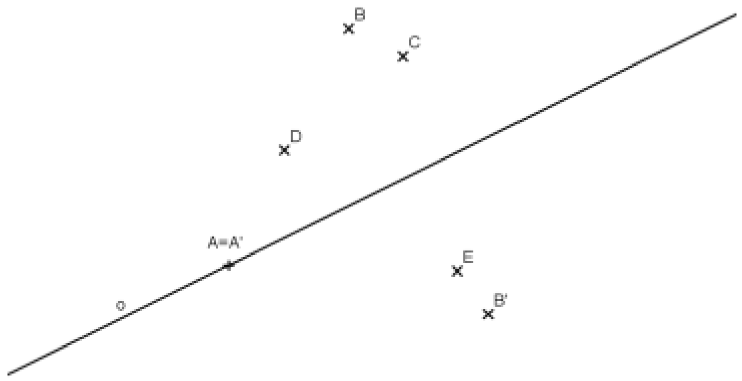

**Image of line *a*, which is passing through the center of symmetry, is a straight line *a‘* which ……………………………………………………………………………………………**
**Image of line *b*, which is not passing through the center of symmetry, is a straight line *b‘* which ……………………………………………………………………………………………**
**Central symmetry ……….. (has/doesn´t have) self-conjugate points. …………………………**
**Lines, that ………………………………………………………. are self-conjugate.**

# OSOVÁ SOUMĚRNOST

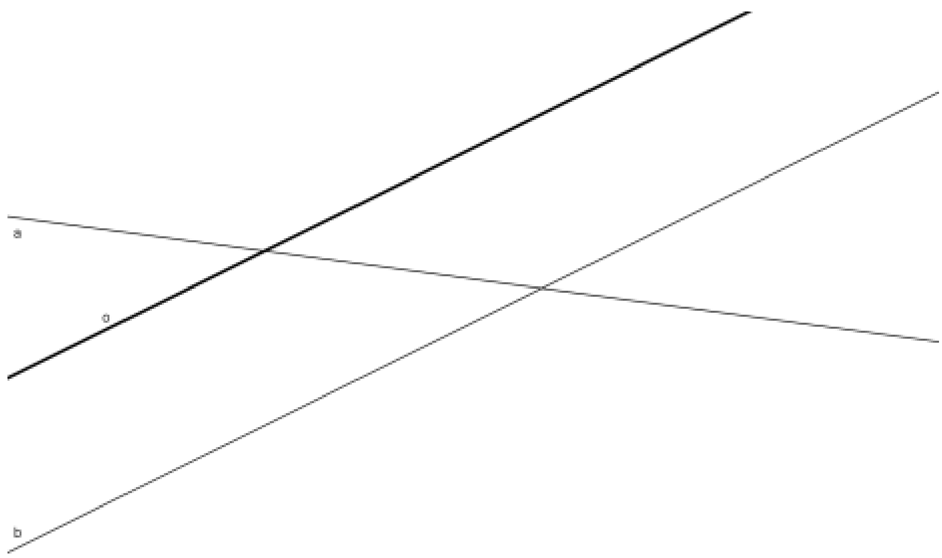
**Je dána přímka *o*.**
**OSOVÁ SOUMĚRNOST je shodné zobrazení *O(o)*, které přiřazuje:**
1. **každému bodu $X \notin o$ bod X‘ tak, že přímka *o* je osou úsečky XX‘.**
2. **každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.**

- Přímka *o* se nazývá osa souměrnosti.

**3.** V osové souměrnosti $O(o)$ sestrojte obrazy bodů C, D, E.




**4.** V osové souměrnosti $O(o)$ sestrojte obrazy přímek *a, b*.



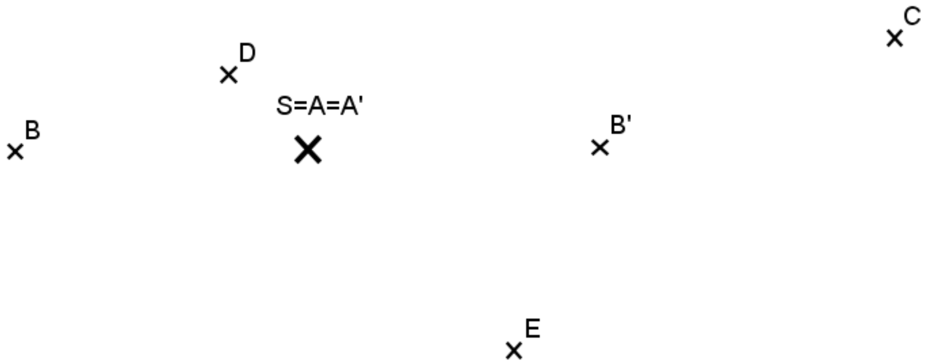

**Obrazem přímky *a,* která je různoběžná s osou souměrnosti, je přímka *a‘*, která………………………………………………………………………………………**
**Obrazem přímky *b,* která je rovnoběžná s osou symetrie, je přímka *b‘*, která ………………………………………………………………………………………**
**Osová souměrnost ……….. (má/nemá) samodružné body.**
**Přímky, které ………………………………………………………. jsou samodružné.**

# STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

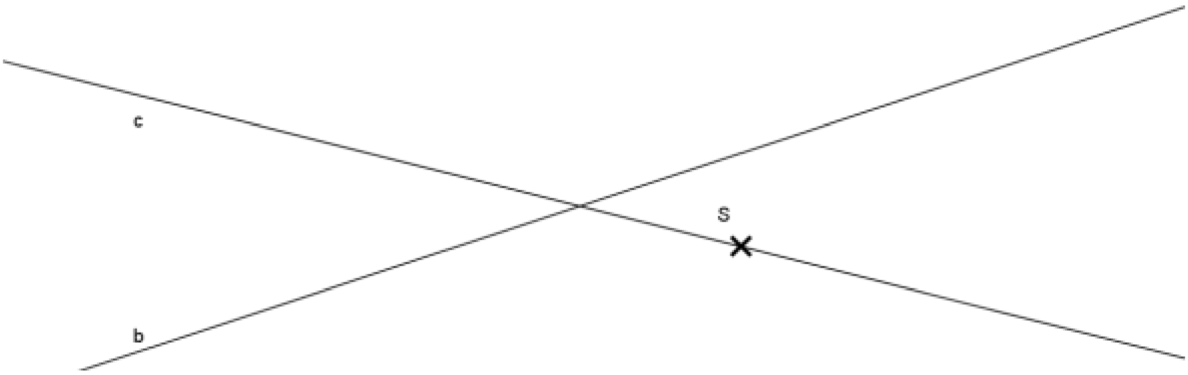
**Je dán bod $S$.**
**STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST je shodné zobrazení $S(S)$, které přiřazuje:**
**1. každému bodu $X \neq S$ bod X‘ tak, že bod $S$ je středem úsečky XX‘.**
**2. každému bodu $Y = S$ bod $Y' = Y$.**

- Bod *S* se nazývá střed souměrnosti..

**3.** Ve středové souměrnosti $S(S)$ sestrojte obrazy bodů D, E, F.




**4.** Ve středové souměrnosti $S(S)$ sestrojte obrazy přímek *a*, *b*.




**Obrazem přímky *a*, která prochází středem souměrnosti, je přímka *a‘*, která**
**………………………………………………………………………………………**
**Obrazem přímky *b*, která neprochází středem symetrie, je bod *b‘*, která**
**…………………………………………………………………………………………**
**Středová souměrnost……….. (má/nemá) samodružné body .**
**Přímky, které ………………………………………………………. samodružné.**

# TRANSLATION

To define the translation, we must start with a concept - oriented line segment.

**Oriented line segment**

As you know from Physics, vector quantities (such as strength, speed, momentum, ..) are defined not only by the size but also by the direction and we illustrate them using oriented line segments.

Oriented line segment is a line segment, in which it is determined which of the extreme point is the starting point and which is the............... point.

Oriented line segment with initial point A and end point B is written as $\overrightarrow{AB}$. And the graphical representation is a line segment with an arrow at the end point.

Lenght of an oriented line segment $\overrightarrow{AB}$ is the lenght of a segment AB, $|\overrightarrow{AB}|$.

**Example:**

*Draw oriented line segments $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$, for which is specified:*

$|\overrightarrow{AB}| = 3\ cm, |\overrightarrow{CD}| = 2{,}5\ cm, |\overrightarrow{EF}| = 7\ cm$

Another important concept that we need to learn is positively oriented line segment.

We say that oriented line segments $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ are positively oriented line segments if

1. Half-lines $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ lies on the same line and one of them is a part of the other, or both half-lines $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ are identical.
   *Construct an example of this type of two positively oriented line segments.*

   or

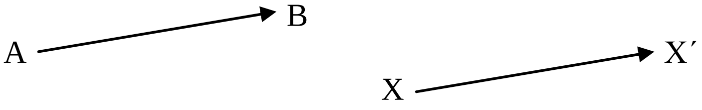
2. They lie on different parallel lines and half-lines $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ lies in the same half-plane with a boundary line AC.
   *Construct an example of this type of two positively oriented line segments.*

Now we can finally define another mapping, which is called translation.

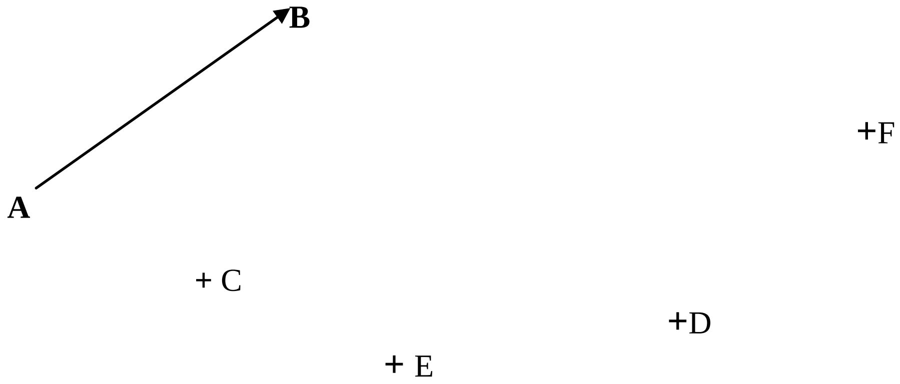
**TRANSLATION is an identical mapping $T(\overrightarrow{AB})$ which assigns each point X to point X´ so that the oriented line segments $\overrightarrow{XX'}$ and $\overrightarrow{AB}$ are the same length and are positively oriented.**

The length of the line segment $\overrightarrow{AB}$ determines ............ ................ and its orientation determines ..................................................

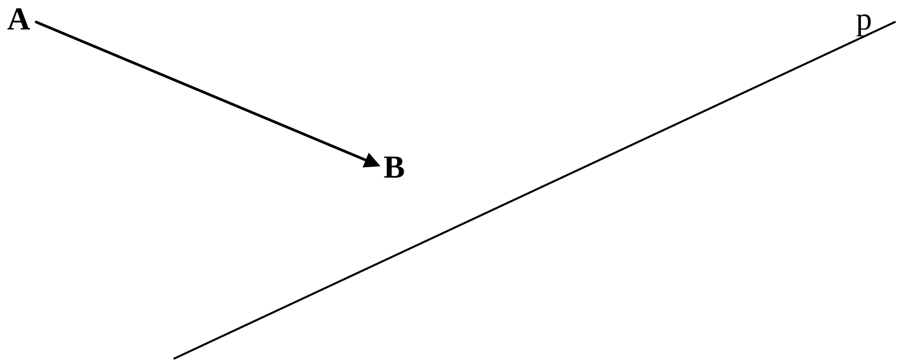
$\mathbf{T}(\overrightarrow{AB}): \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X'}$



**3.** Find and conctruct images of points C,D,E,F in translation $T(\overrightarrow{AB})$.




**4.** Find and conctruct the image of line *p* in translation $T(\overrightarrow{AB})$.




**5.** Find and conctruct the images of following formations in translation $T(\overrightarrow{AB})$.

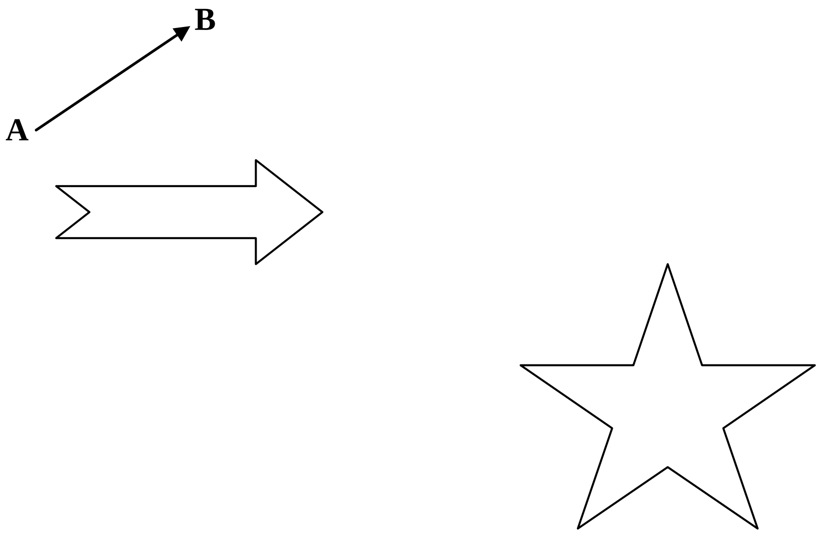



**Image of line p, which is not parallel to the direction of translation, is a straight line p´, which ……………………………………………..**
**Translation ……… (has/doesn´t have) self-conjugate points.**
**Lines, that …………………………………………………………. are self-conjugate.**

# POSUNUTÍ

Abychom mohli nadefinovat posunutí, je nutné nejdřív seznámit se s pojmem orientovaná úsečka.

**Orientovaná úsečka**

Z fyziky víte, že vektorové veličiny (např. síla, rychlost, hybnost,..) jsou kromě velikosti určeny také jejich směrem a znázorňujeme je pomocí orientovaných úseček.

Orientovaná úsečka je úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je tzv. počáteční bod a který je tzv. …………… bod.

Orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B značíme $\overrightarrow{AB}$. A graficky znázorňujeme úsečkou se šipkou u koncového bodu.

Délka orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ je délka úsečky AB, značíme $|\overrightarrow{AB}|$.

**Př.:**

*Znázorněte libovolné orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$, pro které platí:*

$|\overrightarrow{AB}| = 3cm, |\overrightarrow{CD}| = 2{,}5cm, |\overrightarrow{EF}| = 7cm$

Další důležitý pojem, se kterým se musíme seznámit jsou souhlasně orientované úsečky.

Řekneme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ jsou souhlasně orientované jestliže buď

1. polopřímky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ leží na téže přímce a jedna z nich je součástí druhé, případně obě polopřímky splynou
   *Doplňte obrázek takových dvou souhlasně orientovaných úseček.*

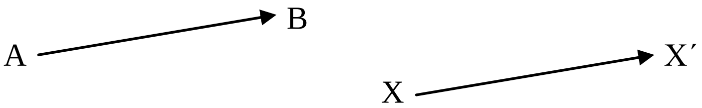
   nebo
2. leží na různých rovnoběžkách a polopřímky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC.
   *Doplňte obrázek takových dvou souhlasně orientovaných úseček.*

Nyní už si konečně můžeme nadefinovat další ze shodných zobrazení, kterým je posunutí.

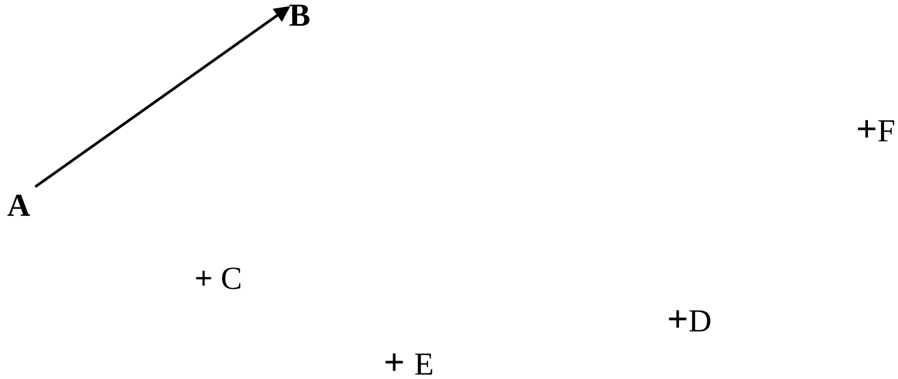
**Je dána orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$.**
**POSUNUTÍ (translace) je shodné zobrazení T($\overrightarrow{AB}$), které každému bodu X přiřadí bod X´ tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ mají stejnou délku a jsou souhlasně orientovány.**

Délka úsečky $\overrightarrow{AB}$ určuje …………. ……………. A její orientace určuje směr posunutí.

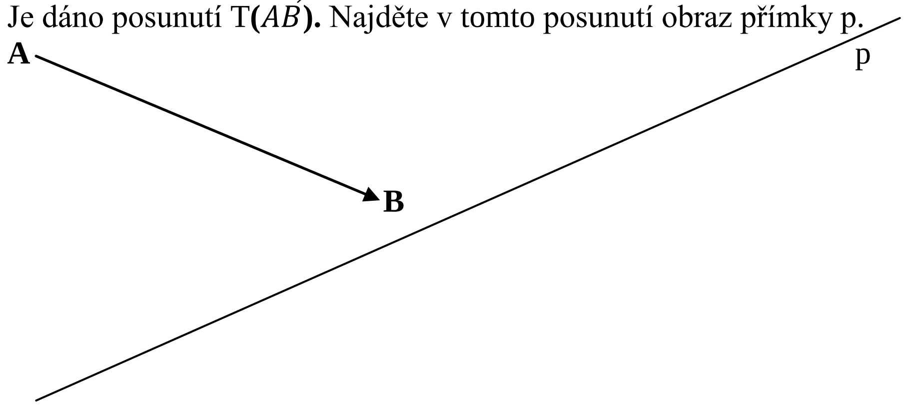
$\mathbf{T}(\overrightarrow{AB}): \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X'}$



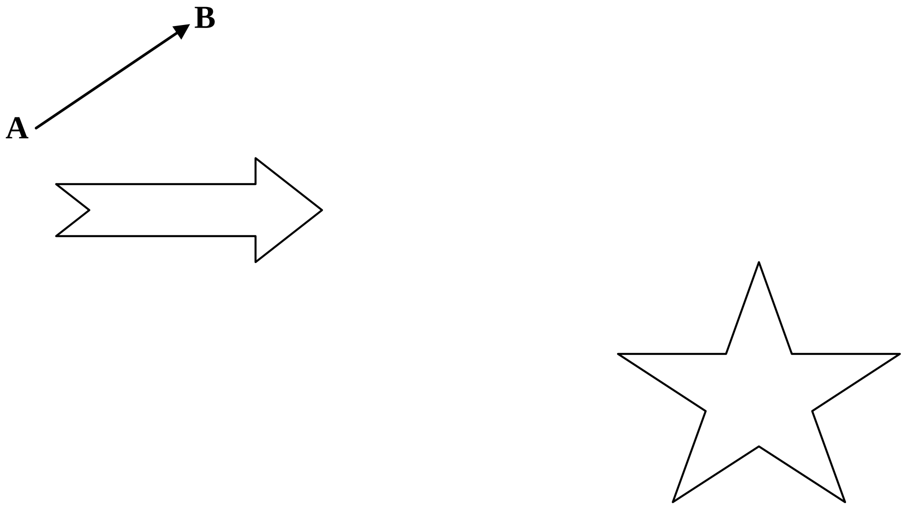
**1.** Je dáno posunutí T**(**$\overrightarrow{AB}$**).** Najděte v tomto posunutí obrazy daných bodů C,D,E,F.




**2.** Je dáno posunutí T**(**$\overrightarrow{AB}$**).** Najděte v tomto posunutí obraz přímky p.




**3.** Je dáno posunutí T**(**$\overrightarrow{AB}$**).** Najděte v tomto posunutí obrazy daných útvarů:




**Obrazem přímky p, která není rovnoběžná se směrem posunutí je přímka p´, která ……………………………………………..**
**Posunutí ……… (má/nemá) samodružné body.**
**Samodružné jsou přímky, které ……………………………………………………….**

# ORIENTED ANGLE

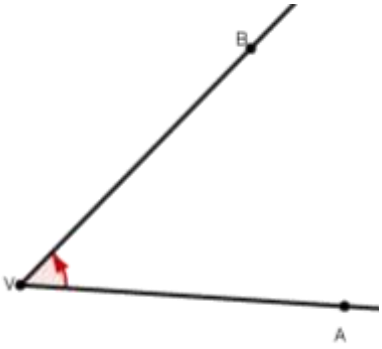
To define the rotation, we must start with the term oriented angle.

**Oriented angle**

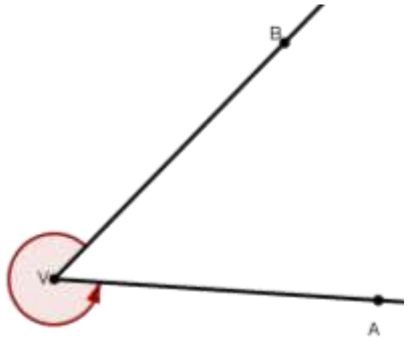
**Oriented angle** is the angle in which it is determined which arm is the initial arm. The other arm at the end of the angle is called terminal arm.

Oriented angle can be described as the starting and ending position of the ray that rotates around its starting point. Oriented angle is therefore an ordered pair of rays $(\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB})$ with the same starting point V.

Oriented angle is written as $\widehat{AVB}$. This symbol indicates that VA is the initial arm, VB is the terminal arm and V is the vertex of an angle.




***Picture 1***




***Picture 2***

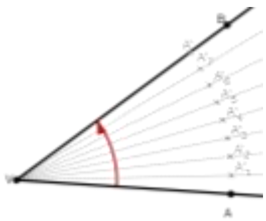
*Picture 1* shows the oriented angle $\widehat{AVB}$ with the initial arm VA and the terminal arm VB.

*Picture 2* shows the oriented angle $\widehat{BVA}$ with the initial arm VB and the terminal arm VA.

In these pictures we can also see how to represent the oriented angle. To the arch, which characterizes angle, it is necessary to assign an arrow that points from the starting arm to the terminal arm.

**Size of the oriented angle**

The initial and terminal arm can be compared to the clock hands. The size of the oriented angle $\widehat{AVB}$ is the angle which describes the initial arm VA counterclockwise around the vertex V so that the starting arm VA overlays the terminal arm VB.

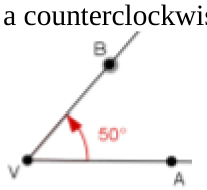


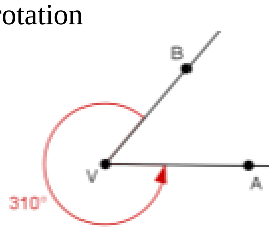
Angle which describes ray $\overrightarrow{VA}$ in this rotation is called the basic angle.

The movement of the starting arm can be:

**positive**

– a counterclockwise rotation



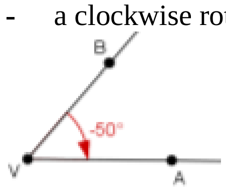



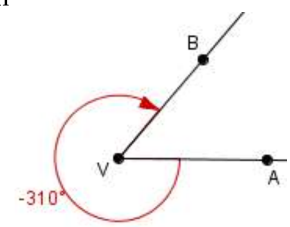

$|\widehat{AVB}| = +50°$  $|\widehat{BVA}| = 310°$

-A positive angle is formed by a counterclockwise rotation of the initial arm.

**negative**

- a clockwise rotation




$|\widehat{BVA}| = -50°$  $|\widehat{AVB}| = -310°$

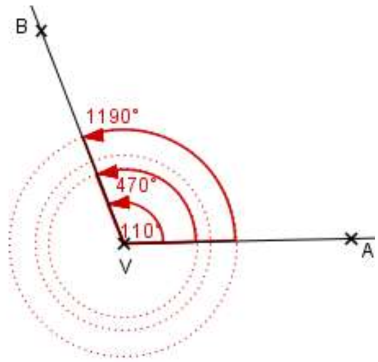
– A negative angle is formed by a clockwise rotation of the initial arm.

**THE SIZE OF THE ORIENTED ANGLE DETERMINES OF HOW MANY DEGREES MUST TURN THE INITIAL ARM IN A POSITIVE OR NEGATIVE SENSE (POSITIVE OR NEGATIVE ANGLE) TO OVERLAY THE TERMINAL ARM.**

As you can see in previous examples, the size of one oriented angle can be expressed in several ways, these ways are endless.

When entering the final position the initial arm can make more than one rotation.

The size of the oriented angle in the picture on the right can be determined as 110°, also as 470° or 1190°.



The most notable size among these expressions of sizes is called the base size of an oriented angle.

**THE BASE SIZE OF AN ORIENTED ANGLE $\widehat{AVB}$ IS THE SIZE OF THE ANGLE $AVB$ WHICH CREATES THE RAY $\overrightarrow{VA}$ BY ROTATING IN A POSITIVE SENSE TO RAY $\overrightarrow{VB}$.**
**IT IS ALWAYS A NUMBER BETWEEN $\langle 0, 2\pi)$ OR $\langle 0, 360°)$**

If the base size of the oriented angle is denoted α, for each size φ of the oriented angle it can be written:
$\boxed{\varphi = a + k \cdot 360°}$ or in arc degree $\boxed{\varphi = a + k \cdot 2\pi}$, where $k \in Z$.

**The calculating of the basic size of an oriented angle**

$\boldsymbol{\varphi \geq 0°}$

$\varphi = 1\,522°$

$1\,522° = \alpha + k.360°$
$1\,522 : 360 = 4{,}2$
$k = 4$
$1\,522° = \alpha + 4 \cdot 360°$
$\alpha = 1\,522° - 4 \cdot 360° = 1\,522° - 1440°$
$\boxed{\alpha = 82°}$

$\varphi = \frac{14}{3}\pi = 4\frac{2}{3}\pi$

$\frac{14}{3}\pi = \alpha + k.2\pi$
$4\frac{2}{3}\pi = \alpha + 4\pi$
$\alpha = 4\frac{2}{3}\pi - 4\pi$
$\boxed{\alpha = \frac{2}{3}\pi}$

$\boldsymbol{\varphi} < 0°$

$\varphi = -487°$

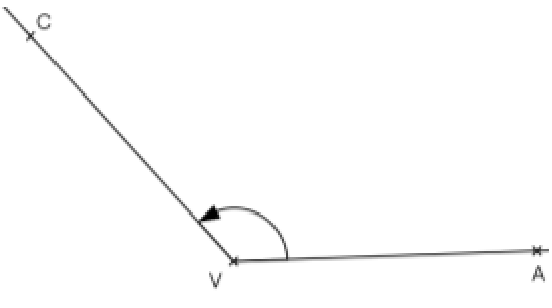
$-487° = \beta - k \cdot 360°$
$k \cdot 360° - 487° = \beta$
$2 \cdot 360° - 487° = \beta$
$\beta = 720° - 487°$
$\boxed{\beta = 233°}$

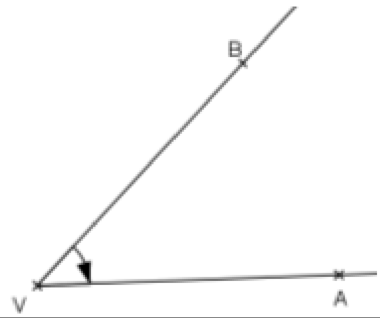
$\varphi = -\frac{33}{5}\pi = -6\frac{3}{5}\pi$

$-6\frac{3}{5}\pi = \beta - k \cdot 2\pi$
$\beta = k \cdot 2\pi - 6\frac{3}{5}\pi$
$\beta = 8\pi - 6\frac{3}{5}\pi$
$\boxed{\beta = \frac{7}{5}\pi}$

**Practise:**

**1.** Determine the basic sizes of these oriented angles:




**2.** Calculate the basic sizes of these angles:

**a)** $+380°$
**b)** $-50°$
**c)** $+580°$
**d)** $-580°$
**e)** $+1036°$

# ORIENTOVANÝ ÚHEL

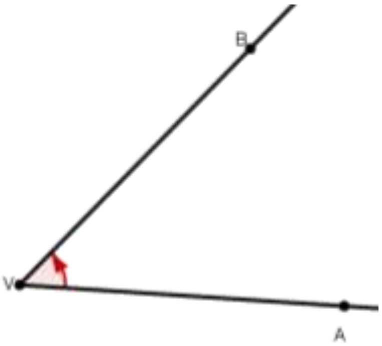
Abychom mohli nadefinovat otočení, je nutné nejdřív seznámit se s pojmem orientovaný úhel.

**Orientovaný úhel**

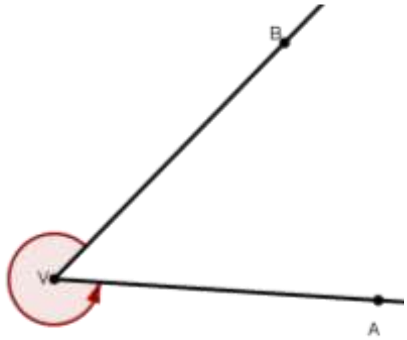
**Orientovaný úhel** je úhel, u něhož je určeno, které jeho rameno je tzv. počáteční rameno; druhé rameno je jeho koncovým ramenem.

Orientovaný úhel si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem svého počátku. Orientovaný úhel je tedy uspořádaná dvojice polopřímek $(\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB})$se společným počátkem V.

Orientovaný úhel značíme $\widehat{AVB}$. Z tohoto vyplývá, že VA je počáteční rameno, VB je koncové rameno a V je vrchol úhlu.




*Obr. 3*




*Obr. 4*

Na *obrázku 1* vidíme orientovaný úhel $\widehat{AVB}$s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB.

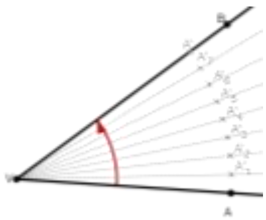
Na *obrázku 2* můžeme vidět orientovaný úhel $\widehat{BVA}$ s počátečním ramenem VB a koncovým ramenem VA.

Na obrázcích lze také vidět, jak orientovaný úhel znázorňujeme.

K oblouku, který vyznačuje úhel, je nutné přiřadit šipku, která směřuje od počátečního ramene ke koncovému.

**Velikost orientovaného úhlu**

Počáteční a koncové rameno orientovaného úhlu si lze představit jako hodinové ručičky. Velikostí orientovaného úhlu je pak úhel, který opíše počáteční rameno VA proti směru chodu hodinových ručiček kolem vrcholu V tak, aby počáteční rameno VA splynulo s koncovým ramenem VB.

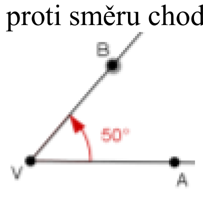


Velikost úhlu, který opíše polopřímka $\overrightarrow{VA}$ při tomto otáčení se nazývá <u>základní velikost </u>orientovaného úhlu.

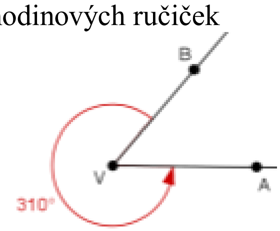
K pohybu počáteční polopřímky může dojít:

**v kladném smyslu**

– proti směru chodu hodinových ručiček




$|\widehat{AVB}| = +50°$

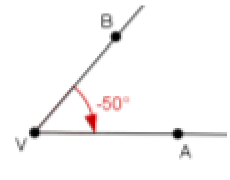



$|\widehat{BVA}| = 310°$

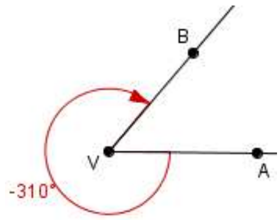
-Pokud otáčíme počátečním ramenem v kladném smyslu, je velikost orientovaného úhlu kladná.

**v záporném smyslu**

-po směru chodu hodinových ručiček




$|\widehat{B\,VA}| = -50°$




$|\widehat{AVB}| = -310°$

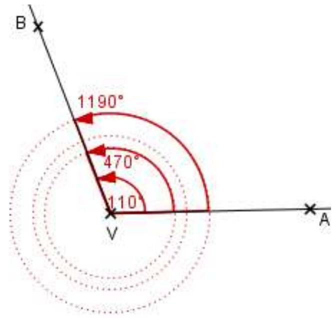
–. Pokud otáčíme počátečním ramenem v záporném smyslu, je velikost orientovaného úhlu záporná.

**VELIKOST ORIENTOVANÉHO ÚHLU UDÁVÁ, O KOLIK STUPŇŮ MUSÍME OTOČIT POČÁTEČNÍM RAMENEM V KLADNÉM ČI ZÁPORNÉM SMYSLU (PODLE ZNAMÉNKA ÚHLU), ABY POČÁTEČNÍ RAMENO SPLYNULO S KONCOVÝM RAMENEM.**

Jak je vidět z předchozích příkladů, lze velikost jednoho orientovaného úhlu vyjádřit více způsoby, těchto způsobů je nekonečně mnoho.

Počáteční rameno může při přechodu do polohy koncového ramene vykonat více otáček.

Velikost orientovaného úhlu na obrázku vpravo můžeme vyjádřit jako 110°, ale také 470°nebo 1190°.



Mezi těmito vyjádřeními velikostí orientovaného úhlu je ale nejvýznamnější jeho základní velikost.

**ZÁKLADNÍ VELIKOST ORIENTOVANÉHO ÚHLU $\widehat{AVB}$ JE VELIKOST TOHO ÚHLU $AVB$, KTERÝ VYTVOŘÍ POLOPŘÍMKA $\overrightarrow{VA}$ OTOČENÍM DO POLOPŘÍMKY $\overrightarrow{VB}$ V KLADNÉM SMYSLU.**
**JE TO VŽDY ČÍSLO Z INTERVALU $\langle 0, 2\pi)$ PŘÍP. $\langle 0, 360°)$**

Pokud základní velikost orientovaného úhlu označíme α, platí pro velikost φ libovolného orientovaného úhlu:

$\boxed{\varphi = \alpha + k \cdot 360°}$ resp. v obloukové míře $\boxed{\varphi = \alpha + k \cdot 2\pi}$, kde $k \in Z$.

**Výpočet základní velikosti α orientovaného úhlu**

**$\varphi \geq 0°$**

$\varphi = 1\,522°$

$1\,522° = \alpha + k.360°$

$1\,522 : 360 = 4{,}2$

$k = 4$

$1\,522° = \alpha + 4 \cdot 360°$

$\alpha = 1\,522° - 4 \cdot 360° = 1\,522° - 1440°$

$\boxed{\alpha = 82°}$

$\varphi = \frac{14}{3}\pi = 4\frac{2}{3}\pi$

$\frac{14}{3}\pi = \alpha + k.2\pi$

$4\frac{2}{3}\pi = \alpha + 4\pi$

$\alpha = 4\frac{2}{3}\pi - 4\pi$

$\boxed{\alpha = \frac{2}{3}\pi}$

**$\varphi < 0°$**

$\varphi = -487°$

$-487° = \beta - k \cdot 360°$

$k \cdot 360° - 487° = \beta$

$2 \cdot 360° - 487° = \beta$

$\beta = 720° - 487°$

$\boxed{\beta = 233°}$

$\varphi = -\frac{33}{5}\pi = -6\frac{3}{5}\pi$

$-6\frac{3}{5}\pi = \beta - k \cdot 2\pi$

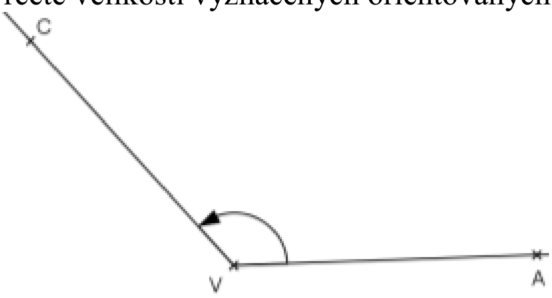
$\beta = k \cdot 2\pi - 6\frac{3}{5}\pi$

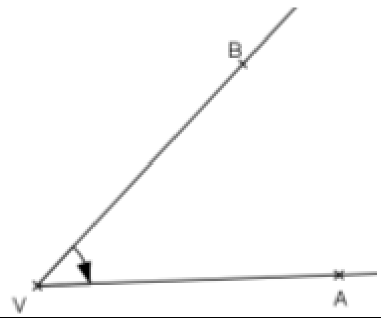
$\beta = 8\pi - 6\frac{3}{5}\pi$

$\boxed{\beta = \frac{7}{5}\pi}$

**Úlohy k procvičení:**

**Př.:** Určete velikosti vyznačených orientovaných úhlů:




**Př.:** Určete základní velikosti následujících úhlů: $+380°, -50°, +580°, -580°, +1036°$

# ROTACE 1. ČÁST - ORIENTOVANÝ ÚHEL

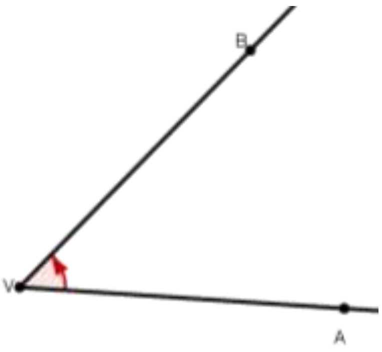
Abychom mohli nadefinovat otočení, je nutné nejdřív seznámit se s pojmem orientovaný úhel.

**Orientovaný úhel**

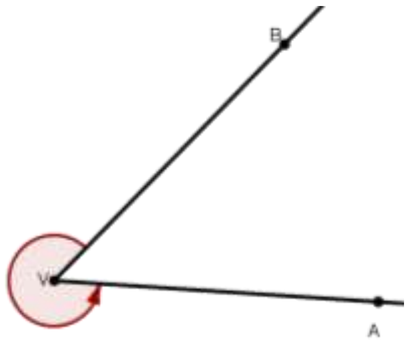
**Orientovaný úhel** je úhel, u něhož je určeno, které jeho rameno je tzv. počáteční rameno; druhé rameno je jeho koncovým ramenem.

Orientovaný úhel si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem svého počátku. Orientovaný úhel je tedy uspořádaná dvojice polopřímek $(\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB})$se společným počátkem V.

Orientovaný úhel značíme $\widehat{AVB}$. Z tohoto vyplývá, že VA je počáteční rameno, VB je koncové rameno a V je vrchol úhlu.




***Obr. 5***

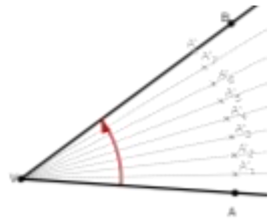



***Obr. 6***

Na *obrázku 1* vidíme orientovaný úhel $\widehat{AVB}$s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB.
Na *obrázku 2* můžeme vidět orientovaný úhel $\widehat{BVA}$ s počátečním ramenem VB a koncovým ramenem VA.
Na obrázcích lze také vidět, jak orientovaný úhel znázorňujeme.
K oblouku, který vyznačuje úhel, je nutné přiřadit šipku, která směřuje od počátečního ramene ke koncovému.

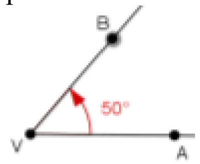
**Velikost orientovaného úhlu**

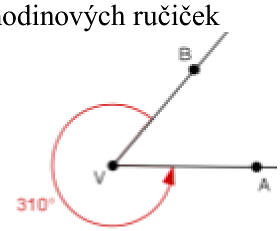
Počáteční a koncové rameno orientovaného úhlu si lze představit jako hodinové ručičky. Velikostí orientovaného úhlu je pak úhel, který opíše počáteční rameno VA proti směru chodu hodinových ručiček kolem vrcholu V tak, aby počáteční rameno VA splynulo s koncovým ramenem VB.



Velikost úhlu, který opíše polopřímka $\overrightarrow{VA}$ při tomto otáčení se nazývá <u>základní velikost </u>orientovaného úhlu.
K pohybu počáteční polopřímky může dojít:

**v kladném smyslu**
– proti směru chodu hodinových ručiček

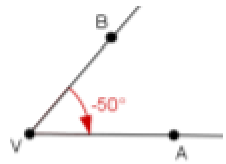


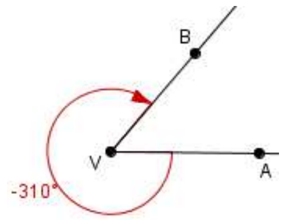




$\left|\widehat{AVB}\right| = +50°$ $\left|\widehat{BVA}\right| = 310°$

-Pokud otáčíme počátečním ramenem v kladném smyslu, je velikost orientovaného úhlu kladná.

**v záporném smyslu**
-po směru chodu hodinových ručiček



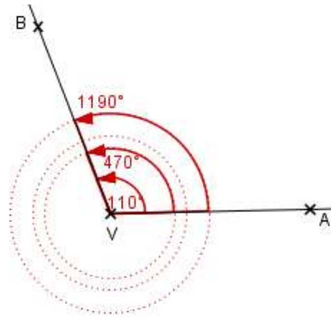




$\left|\widehat{B\,VA}\right| = -50°$ $\left|\widehat{AVB}\right| = -310°$

–. Pokud otáčíme počátečním ramenem v záporném smyslu, je velikost orientovaného úhlu záporná.

**VELIKOST ORIENTOVANÉHO ÚHLU UDÁVÁ, O KOLIK STUPŇŮ MUSÍME OTOČIT POČÁTEČNÍM RAMENEM V KLADNÉM ČI ZÁPORNÉM SMYSLU (PODLE ZNAMÉNKA ÚHLU), ABY POČÁTEČNÍ RAMENO SPLYNULO S KONCOVÝM RAMENEM.**

Jak je vidět z předchozích příkladů, lze velikost jednoho orientovaného úhlu vyjádřit více způsoby, těchto způsobů je nekonečně mnoho.
Počáteční rameno může při přechodu do polohy koncového ramene vykonat více otáček.



Velikost orientovaného úhlu na obrázku vpravo můžeme vyjádřit jako 110°, ale také 470°nebo 1190°. Mezi těmito vyjádřeními velikostí orientovaného úhlu je ale nejvýznamnější jeho základní velikost.

**ZÁKLADNÍ VELIKOST ORIENTOVANÉHO ÚHLU $\widehat{AVB}$ JE VELIKOST TOHO ÚHLU $AVB$, KTERÝ VYTVOŘÍ POLOPŘÍMKA $\overrightarrow{VA}$ OTOČENÍM DO POLOPŘÍMKY $\overrightarrow{VB}$ V KLADNÉM SMYSLU.**
**JE TO VŽDY ČÍSLO Z INTERVALU $\langle 0, 2\pi)$ PŘÍP. $\langle 0, 360°)$**

Pokud základní velikost orientovaného úhlu označíme α, platí pro velikost φ libovolného orientovaného úhlu:

$\boxed{\varphi = \alpha + k \cdot 360°}$ resp. v obloukové míře $\boxed{\varphi = \alpha + k \cdot 2\pi}$, kde $k \in Z$.

**Výpočet základní velikosti α orientovaného úhlu**

$\underline{\boldsymbol{\varphi \geq 0°}}$

$\varphi = 1\,522°$

$1\,522° = \alpha + k.360°$

$1\,522 : 360 = 4{,}2$

$k = 4$

$1\,522° = \alpha + 4 \cdot 360°$

$\alpha = 1\,522° - 4 \cdot 360° = 1\,522° - 1440°$

$\boxed{\alpha = 82°}$

$\varphi = \frac{14}{3}\pi = 4\frac{2}{3}\pi$

$\frac{14}{3}\pi = \alpha + k.2\pi$

$4\frac{2}{3}\pi = \alpha + 4\pi$

$\alpha = 4\frac{2}{3}\pi - 4\pi$

$\boxed{\alpha = \frac{2}{3}\pi}$

$\underline{\boldsymbol{\varphi} < 0°}$

$\varphi = -487°$

$-487° = \beta - k \cdot 360°$

$k \cdot 360° - 487° = \beta$

$2 \cdot 360° - 487° = \beta$

$\beta = 720° - 487°$

$\boxed{\beta = 233°}$

$\varphi = -\frac{33}{5}\pi = -6\frac{3}{5}\pi$

$-6\frac{3}{5}\pi = \beta - k \cdot 2\pi$

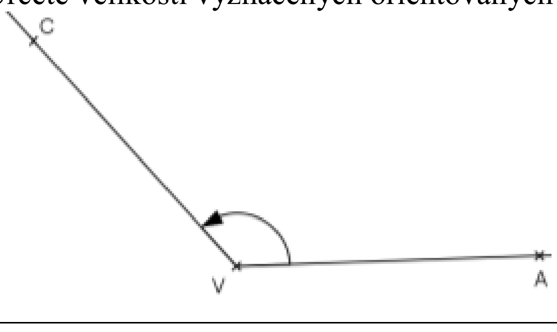
$\beta = k \cdot 2\pi - 6\frac{3}{5}\pi$

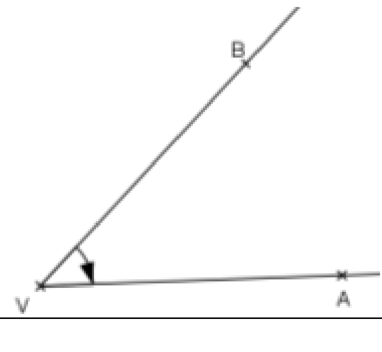
$\beta = 8\pi - 6\frac{3}{5}\pi$

$\boxed{\beta = \frac{7}{5}\pi}$

**Úlohy k procvičení:**

**Př.:** Určete velikosti vyznačených orientovaných úhlů:




**Př.:** Určete základní velikosti následujících úhlů: $+380°, -50°, +580°, -580°, +1036°$

# ROTATION

**There is an oriented angle $\widehat{AVB}$, which size is φ, and a point S**
**ROTATION is an identical mapping R(S,φ) which assigns**
**1. point S to point S.**
**2. each point $X \neq S$ to point X‘ so that $|XS| = |X'S|$ and oriented angle $\widehat{XSX'}$size is φ.**

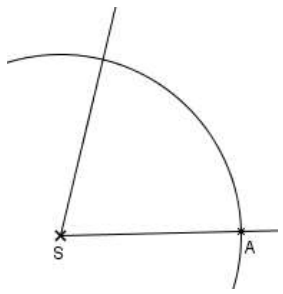
Point S is called the center of rotation, oriented angle with size φ is the angle of rotation.

**<u>The procedure of constructing the image of a point in the rotation:</u>**

Find the image of point $A$ in the rotation $R(S, \varphi)$, if $\varphi = +75°$.
$R(S, \varphi): A \rightarrow A'$

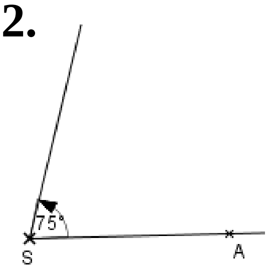
## 1.


*There are points A and S.*
*To find the image of point A in rotation R means to rotate point A around point S by 75° counterclockwise.*



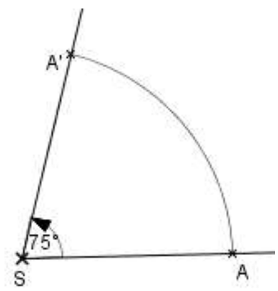

*Futhermore, we know that* $|AS| = |A'S|$.
*In the center of rotation we construct a circle with a radius of* $|AS|$.

## 2.




*We construct ray $\overrightarrow{SA}$.This ray is the initial arm of the oriented angle $\widehat{ASA'}$. Then we construct also the terminal arm of the oriented angle $\widehat{ASA'}$, size of this angle is 75°.*

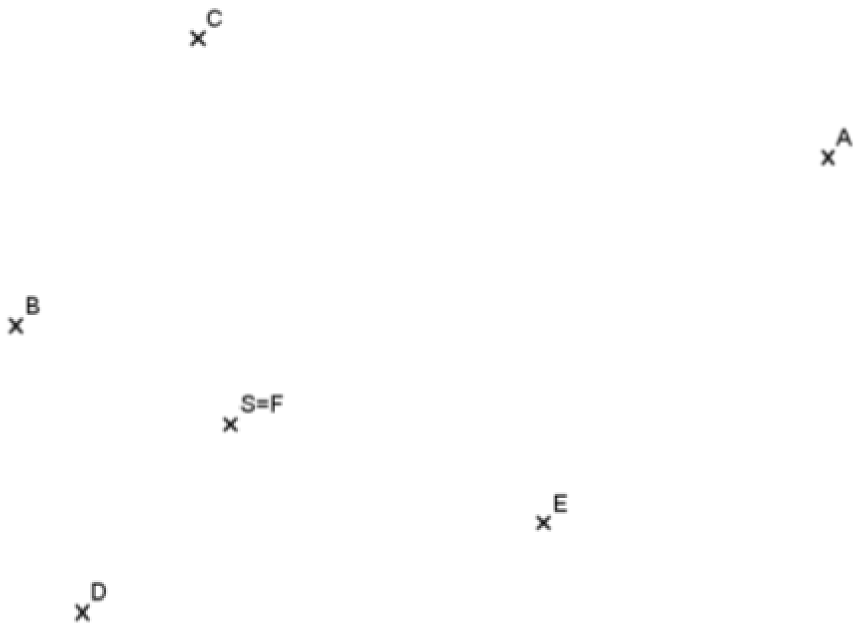
## 3.



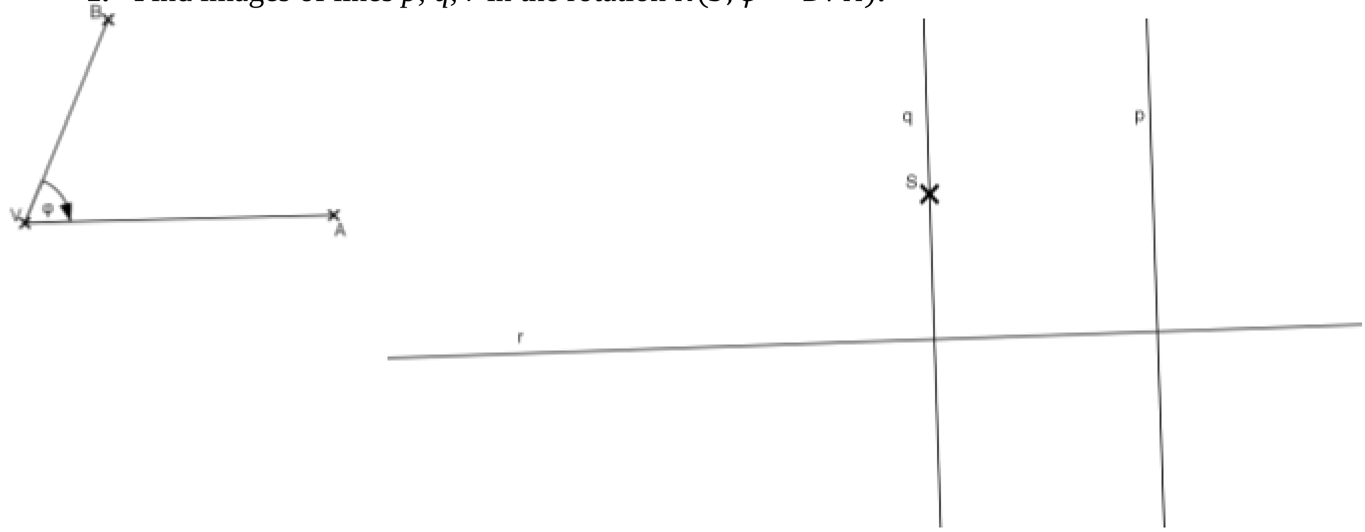

*The image of point A is the intersection of the circle and the terminal arm of the angle (we rotated point A around point S by 75° in the positive sense).*

## Practice:

Find images of points A, B, C, D, E, F $R(S, \varphi)$, if $\varphi = -50°$ .
$R(S, \varphi): A \rightarrow A'$
$R(S, \varphi): B \rightarrow B'$
$R(S, \varphi): C \rightarrow C'$
$R(S, \varphi): D \rightarrow D$
$R(S, \varphi): E \rightarrow E'$
$R(S, \varphi): F \rightarrow F'$



**1.** Find images of lines $p$, $q$, $r$ in the rotation $R(S, \varphi = \widehat{BVA})$.

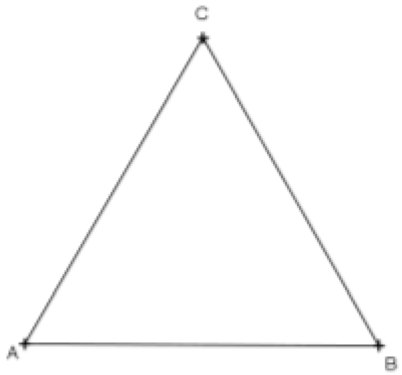



**2.** Construct the image of an equilateral triangle ABC in the rotation $R\left(S, \varphi = \widehat{BVA}\right), if\ \varphi = +60°$

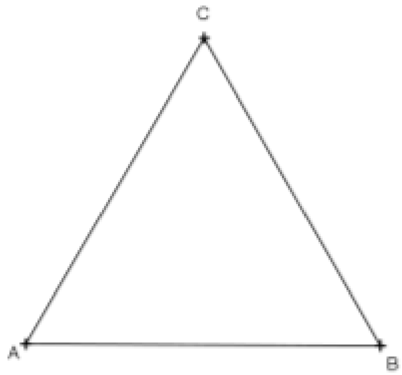
**a)** $S$=$T$, where T is the center of gravity

**b)** $S$=$C$

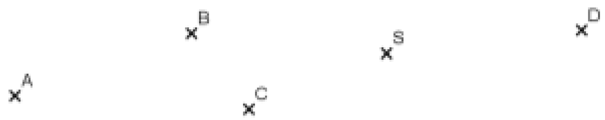
**a)** Solution:



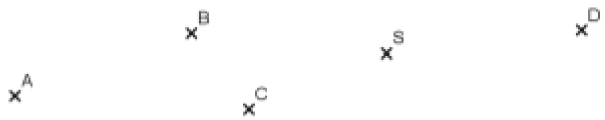

**b)** Solution:




**3.** In the rotation $R(S, \varphi)$, if $\varphi = 180°$ find images of points A,B,C,D




**4.** In the rotation $R(S, \varphi)$, if $\varphi = 360°$ find images of points A,B,C,D




*Fill in gaps:*

**Rotation is …………………** (direct/indirect) **identical mapping.**
**Rotation has…………………….** (how many) **self-conjugated point/points.**
**Rotation …………**(has/doesn't have) **self-conjugated lines.**
**If the angle of rotation is $\boldsymbol{\varphi = 180° + k \cdot 360°}$($\boldsymbol{\varphi = \pi + k \cdot 2\pi}$) then the rotation becomes ………………….**
**If the angle of rotation is $\boldsymbol{\varphi = k \cdot 360°}$ ($\boldsymbol{\varphi = k \cdot 2\pi}$) then the rotation is ……………………**

# OTOČENÍ

**Je dán orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, jehož jedna z velikostí je φ, a bod S**
**OTOČENÍ (rotace) je shodné zobrazení R(S,φ), které**
**1. bodu S přiřazuje bod S.**
**2. každému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X‘ tak, že $|XS| = |X'S|$ a orientovaný úhel XSX‘ má velikost φ.**

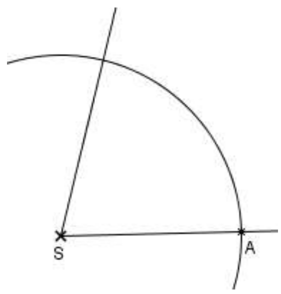
Bod S se nazývá střed otočení, orientovaný úhel o velikosti φ je úhel otočení.

**<u>Postup konstrukce obrazu bodu v rotaci:</u>**

V otočení $R(S,\varphi)$, kde $\varphi = +75°$ najděte obraz bodu A.
$R(S,\varphi): A \to A'$

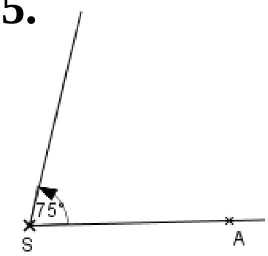
## 4.


*Jsou dány body A a S. Najít obraz bodu A v dané rotaci R znamená otočit bod A kolem bodu S o 75°proti směru chodu hodinových ručiček.*



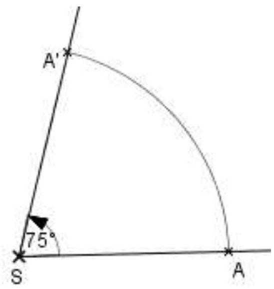

*Dále víme, že $|AS| = |A'S|$. Ve středu rotace S tedy opíšeme kružnici o poloměru $|AS|$.*

## 5.




*Sestrojíme polopřímku $\overrightarrow{SA}$. Tato polopřímka je počátečním ramenem orientovaného úhlu ASA´. Sestrojíme i koncové rameno orientovaného úhlu ASA´ o velikosti +75°.*

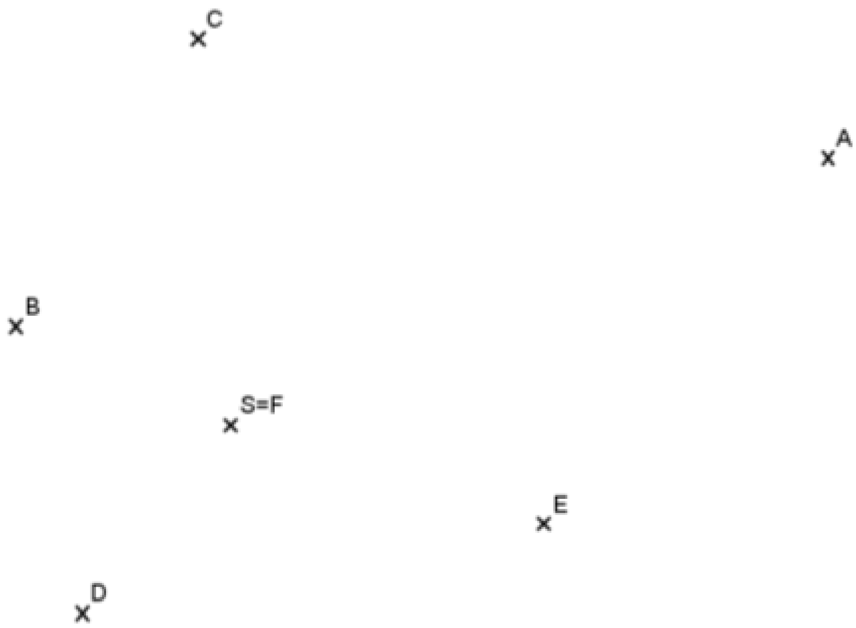
## 6.



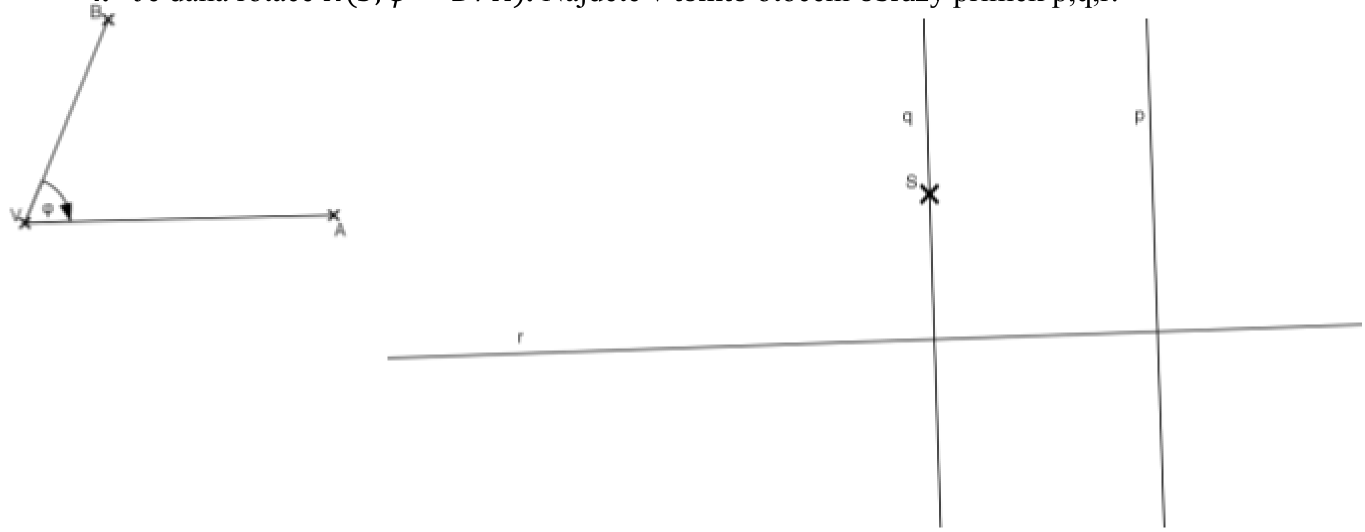

*Obraz bodu A je průsečíkem kružnice a koncového ramene úhlu. (bod A jsem otočili kolem bodu S o 75°v kladném smyslu)*

# Příklad.

V otočení $R(S,\varphi)$, kde $\varphi = -50°$ najděte obrazy bodů A,B,C,D,E,F.
$R(S,\varphi): A \to A'$
$R(S,\varphi): B \to B'$
$R(S,\varphi): C \to C'$
$R(S,\varphi): D \to D$
$R(S,\varphi): E \to E'$
$R(S,\varphi): F \to F'$



**4.** Je dána rotace $R(S, \varphi = \widehat{BVA})$**.** Najděte v tomto otočení obrazy přímek p,q,r.

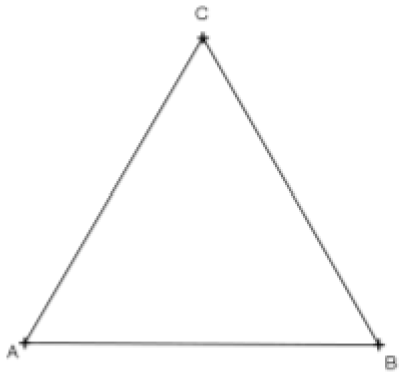



**5.** Je dána rotace $R\big(S, \varphi = \widehat{BVA}\big), kde\ \varphi = +60°$**.** Najděte v tomto otočení obraz rovnostranného trojúhelníka ABC, jestliže

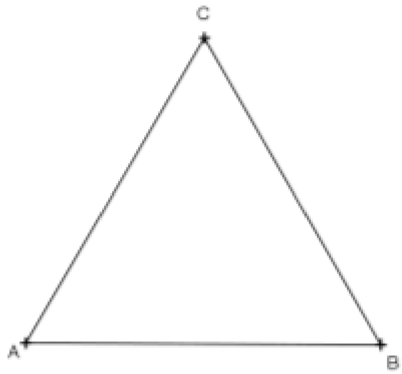
**c)** $S$=$T$, kde T je těžiště

**d)** $S$=$C$

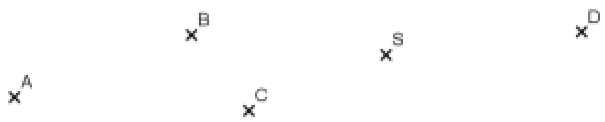
**c)** Řešení:




**d)** Řešení:




**6.** V otočení $R(S, \varphi)$, kde $\varphi = 180°$ najděte obrazy bodů A,B,C,D




**7.** V otočení $R(S, \varphi)$, kde $\varphi = 360°$ najděte obrazy bodů A,B,C,D


*Doplňte vynechaná místa:*

**Otočení je …………………** (přímá/nepřímá) **shodnost.**
**Otočení má……………………..** (počet) **samodružný bod/samodružných bodů.**
**Otočení …………**(má/nemá) **samodružné přímky.**
**Pro úhel otočení $\boldsymbol{\varphi = 180° + k \cdot 360°(\varphi = \pi + k \cdot 2\pi)}$ přejde otočení ve ……… souměrnost.**
**Pro úhel otočení $\boldsymbol{\varphi = k \cdot 360°\ (\varphi = k \cdot 2\pi)}$ je otočení …………………………….**

# POUŽITÁ LITERATURA:


- Pomykalová Eva: Matematika pro gymnázia: Planimetrie. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1997.
- Odvárko Oldřich: Matematika pro gymnázia: Funkce. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1994.
- Odvárko Oldřich: Matematika pro gymnázia: Goniometrie. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1997.
- Bušek Ivan, Calda Emil: Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2002
- Pomykalová Eva: Matematika pro gymnázia: Planimetrie. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák Josef: Přehled středoškolské matematiky, 9.přepr.vyd. Praha:Prometheus, 2008
- Petáková J.: Matematika, příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. 1.vyd. Praha: Prometheus, 2008.
- Kubešová Naděžda: Matematika – přehled středoškolského učiva. 2.vyd. Praha: Vyuka.CZ: Praha, 2007
- Kubát Josef: Matematika, maturitní minimum – Sbírka úloh z matematiky pro střední školy. 1.vyd. Praha: 1996.
- Odvárko Oldřich: Základní poznatky, Matematika pro SOŠ. 1.vyd. Praha: Prometheus, 2008
- Bušek Ivan: Řešené maturitní úlohy z matematiky. 3.vyd.,Praha:prometheus, 1999

Internetové zdroje:
- http://www.sosmath.com/
- http://www.ecourses.ou.edu/
- http://www.intmath.com/
- http://www.karlin.mff.cuni.cz
- http://matematika-libverda.webnode.cz/
- http://fyzika.jreichl.com/
- http://ucebnice.krynicky.cz/